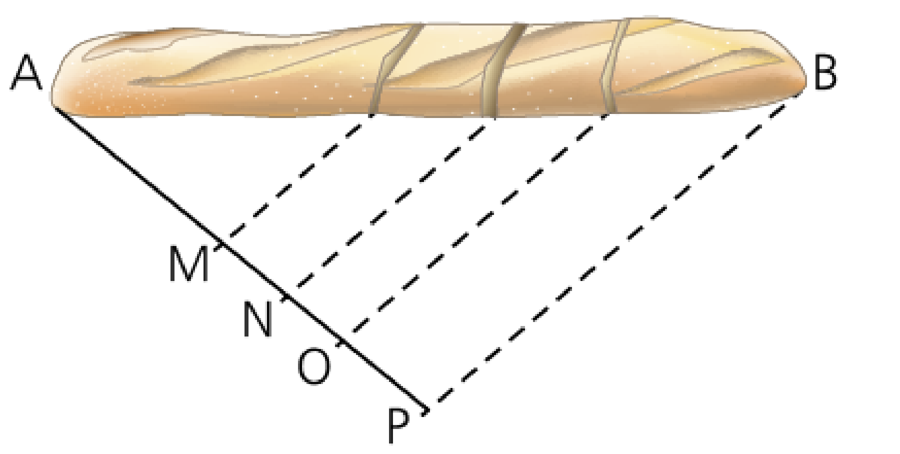
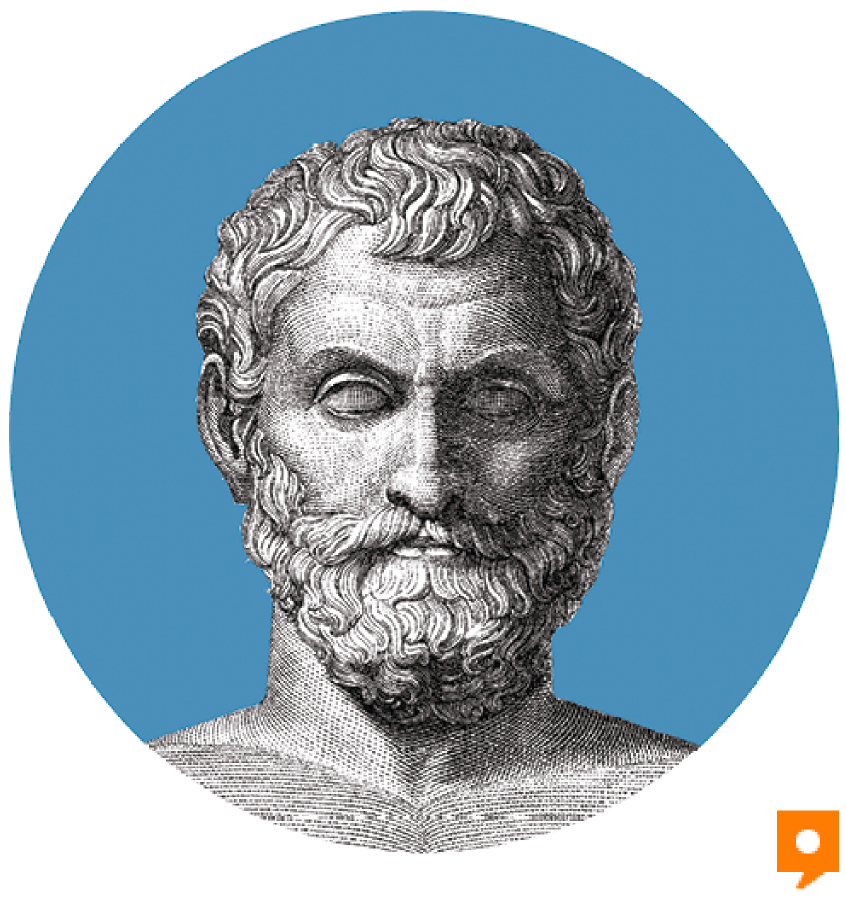
01 Teorema de Tales

Toma una barra de pan y traza un segmento imaginario, $\overline{AB}$, sobre ella. Después, tomando como origen el punto A de este segmento, dibuja una recta auxiliar con la inclinación que desees. Sobre esta recta auxiliar marca cuatro puntos de forma que la dividan en cuatro segmentos de distintos tamaños, tal como aparece en la figura. A continuación, une el último punto marcado, P, con el punto B del segmento imaginario. Si trazas paralelas a esta última recta, PB, por las marcas que has realizado sobre la recta auxiliar, la barra de pan queda dividida en cuatro partes proporcionales a los cuatro segmentos trazados sobre la recta auxiliar:

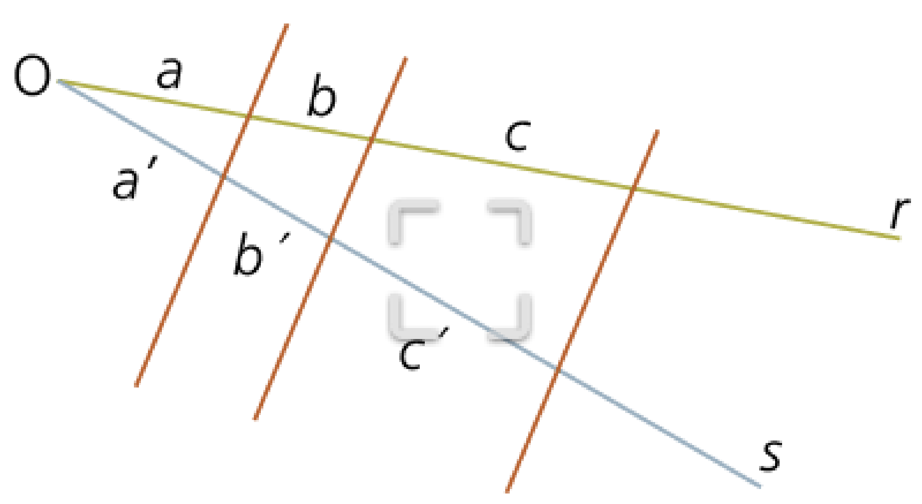




Tales de Mileto (624 a. C.-546 a. C.)

Este sencillo experimento permite introducir el denominado **teorema de Tales,** que establece:

Un conjunto de rectas paralelas que cortan a dos rectas secantes, *r* y *s*, forman en la recta *r* segmentos proporcionales a los correspondientes segmentos formados en la recta *s*.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Observa

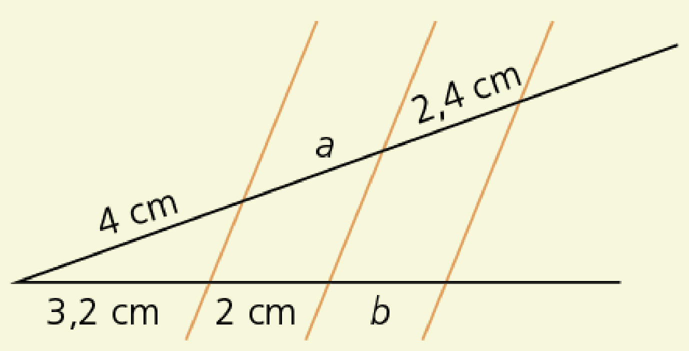
Para dividir el segmento en **partes iguales** se marcan sobre la recta auxiliar, desde el punto A y de forma consecutiva, tantos segmentos **iguales** como partes se deseen hacer.

ACTIVIDADES

1 Dibuja en tu cuaderno un segmento, $\overline{AB}$, de 4 cm de longitud y divídelo en 7 partes iguales.

2 Dibuja un segmento, $\overline{AB}$, de 10 cm de longitud, y divídelo en 3 partes proporcionales a 3, 5 y 7.

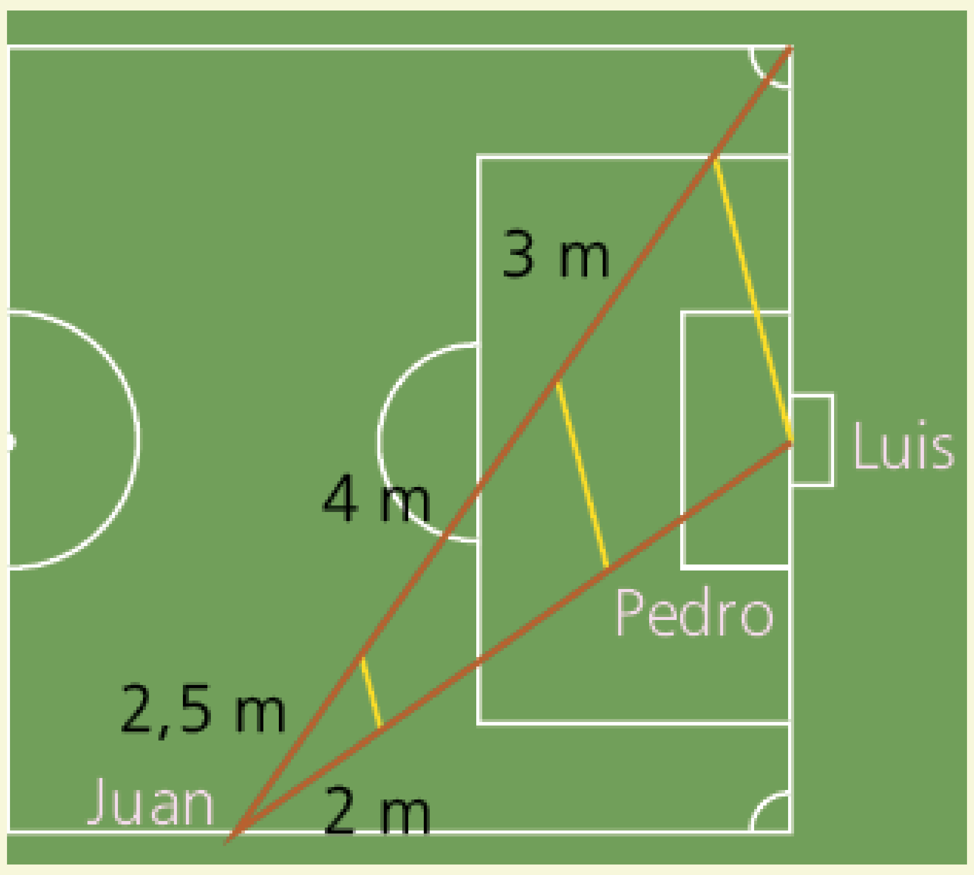
3 Halla el valor de *a* y *b* en la siguiente figura:



4 Utiliza el teorema de Tales para representar sobre la recta real las siguientes fracciones:

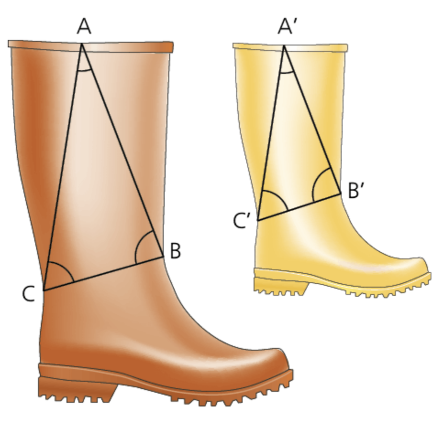
$$\frac{3}{5};\ -\frac{4}{7};\ \frac{8}{3};\ -\frac{11}{6}$$

5 Juan está jugando un partido de fútbol con sus amigos. Calcula cuántos metros en línea recta tendrá que lanzar Juan la pelota para que alcance a Pedro. ¿Y para que le llegue a Luis?



02 Figuras semejantes

Las dos botas representadas en el margen son **semejantes,** pues tienen exactamente la misma forma y solo difieren en el tamaño.



Para analizarlas, en cada figura se marcan tres puntos: A, B y C, en la primera, y A′, B′ y C′, en la segunda. A dichos puntos se los denomina **puntos homólogos.**

Asimismo, en cada figura se trazan tres segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, en la primera, y $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{C'A'}$, en la segunda. Estos segmentos reciben el nombre de **segmentos homólogos.**

Además, en cada figura se puede observar que cada par de estos segmentos homólogos define un ángulo: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ en la primera, y $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$ y $\widehat{C'}$ en la segunda. Estos ángulos se llaman **ángulos homólogos.**

Dos figuras son semejantes si los ángulos homólogos son iguales, y los segmentos homólogos, proporcionales:

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ y } \widehat{C} = \widehat{C'}$$

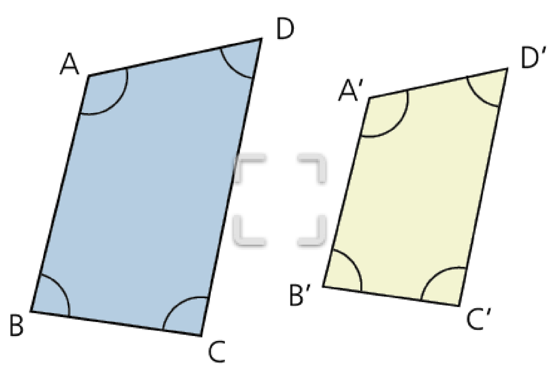
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k$$

Observa

Dos **polígonos regulares** de ***n*** lados son siempre semejantes.

En la expresión anterior, la razón de semejanza, *k,* es la proporción que establecen los segmentos homólogos. Por tanto:

Dos polígonos son semejantes si los ángulos homólogos son iguales, y los segmentos homólogos, proporcionales.

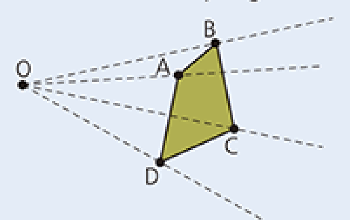


Los polígonos del margen son semejantes porque cumplen estas condiciones:

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{C} = \widehat{C'} \text{ y } \widehat{D} = \widehat{D'} \text{ y } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}}$$

Construcción de un polígono semejante a otro dado

1 Se fija un punto, O, exterior al polígono y se trazan todas las rectas que pasen por él y por los respectivos vértices del polígono.



02.1 Escalas

Para representar objetos muy grandes o muy pequeños, se suelen reducir o aumentar sus dimensiones de forma proporcional. De este modo se obtiene un «objeto a escala», **semejante al objeto real.** Claros ejemplos de escala son los planos, los mapas y las maquetas.

Parque de miniaturas en Madurodam (Holanda)

Escala numérica

Se llama **escala numérica** a la razón de semejanza que hay entre el valor de la medida de la figura representada y de la figura real, ambas en la misma unidad:

$$\text{Escala} = \frac{\text{longitud en la representación}}{\text{longitud real}}$$

La escala numérica se suele expresar de la forma 1:n, que equivale a decir que cada unidad medida sobre la maqueta equivale a *n* unidades medidas en el objeto real.

ACTIVIDAD RESUELTA

Halla la escala numérica empleada en la construcción de una maqueta de un barco de 25 cm de largo si el barco en realidad mide 20 m

De los datos del enunciado se deduce que:

25 cm de maqueta son 2 000 cm (20 m) de barco; por tanto:

$$\text{Escala numérica} = \frac{\text{longitud de representación}}{\text{longitud real}} = \frac{25}{2000} = \frac{1}{\frac{2\,000}{25}} = \frac{1}{80}$$

La escala numérica es $\frac{1}{80}$ y se expresa de la forma 1:80.

Es decir, cada unidad medida en la maqueta equivale a 80 unidades reales en el barco.

Escala gráfica

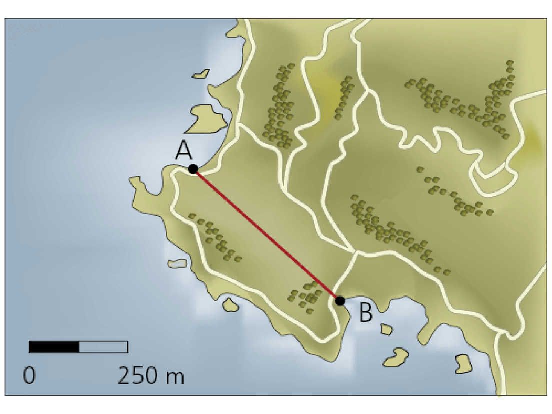
En los mapas, las escalas se expresan generalmente de forma gráfica mediante la presencia de un **segmento graduado.** Cualquier segmento que se considere en el mapa con una longitud igual a la que aparece en el segmento graduado mide en la realidad la cantidad que se indica en la escala.

ACTIVIDAD RESUELTA

Calcula la distancia en línea recta entre los puntos costeros A y B indicados en el mapa adjunto.

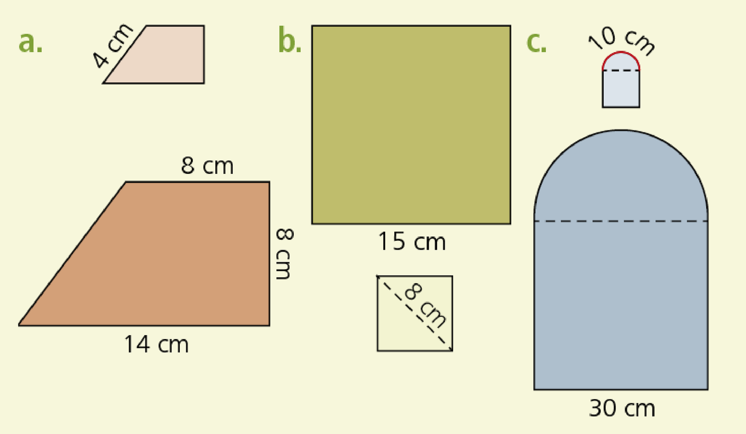
De la escala gráfica del mapa se deduce que 1 cm en el mapa equivale a 250 m reales.

Como $\overline{AB}$ en el mapa mide 2 cm, le corresponderá dos escalas gráficas; por tanto, la distancia real entre dichos puntos es: 2 · 250 m = 500 m



ACTIVIDADES

6 Halla la razón de semejanza que permite pasar de la primera figura a la segunda.

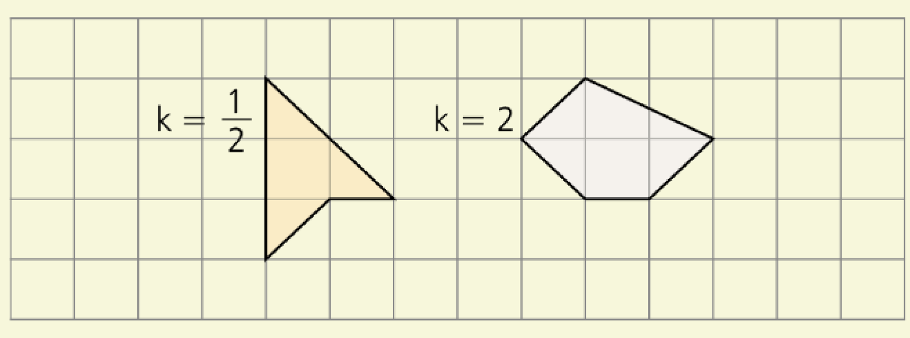


7 Un triángulo isósceles de 9 cm de base y cuyos lados iguales miden 12 cm es semejante a otro que tiene una altura sobre el lado desigual de 20 cm. Halla la razón de semejanza y las dimensiones del triángulo semejante.

8 Un rectángulo cuyos lados miden 6 cm y 8 cm, respectivamente, es semejante a otro de 15 cm de diagonal. Determina las dimensiones del rectángulo semejante.

9 Un hexágono regular de 10 cm de lado es semejante a otro de 10 cm de apotema. Calcula la razón de semejanza.

10 Copia en tu cuaderno los siguientes polígonos y dibuja otro semejante a cada uno de ellos con la razón de semejanza que se indica.



11 Calcula la escala que se ha aplicado en las distintas situaciones.

a. Distancia real entre dos ciudades: 720 km; distancia en el mapa: 10 cm.
b. Altura de la maqueta de una catedral: 16 cm; altura real: 80 m.
c. Ancho de la cocina en el plano de una casa: 5 cm; ancho real: 2 m.
d. Distancia entre dos puntos del plano del callejero de una ciudad: 3 cm; distancia real: 900 m.

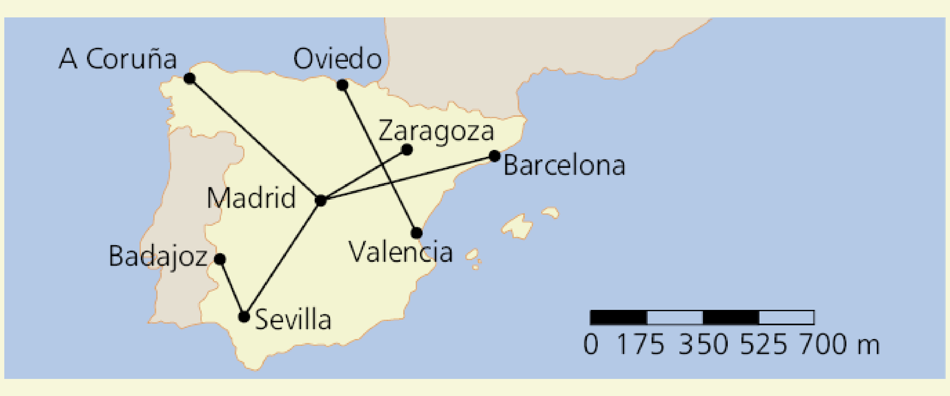
12 Un mapa de España está hecho a escala 1:30 000 000.

a. ¿Qué distancia separa Valencia de Badajoz en el mapa si en la realidad es de 656 km?
b. Si la distancia en el mapa entre Orense y Santander es 1,81 cm, ¿cuál es la distancia real?

13 Una maqueta de un barco de 15 m de eslora mide 50 cm de largo.

a. Calcula la escala utilizada.
b. ¿Qué altura tiene el mástil del barco si en la maqueta mide 20 cm?
c. Si se mantiene esa escala, ¿qué longitud habrá que dar a la maqueta de otro barco de 35 m de eslora?

14 Utiliza la escala gráfica que aparece en el mapa para calcular la longitud de los itinerarios trazados.



15 Un mapa está hecho a escala 1:5 000 000.

a. ¿Qué distancia separa dos puntos en el mapa si en la realidad se encuentran a 900 km?
b. La distancia entre dos puntos del mapa es de 4 cm. ¿Cuál es la distancia real que los separa?

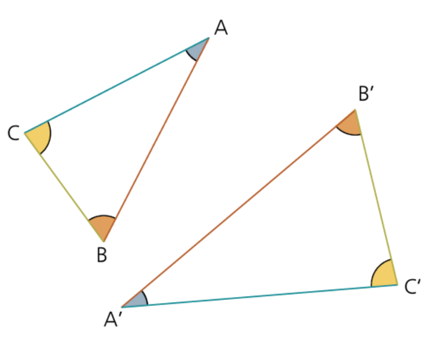
16 Pedro ha dibujado un plano a escala de su casa. Calcula la escala que ha utilizado sabiendo que la longitud del pasillo en el plano es de 20 cm, mientras que en la realidad tiene 5 m de largo. ¿Qué distancia separa en este plano la cocina del comedor si en la realidad es de 3 m?

17 Si se hace una fotocopia de un plano de carreteras ampliada un 50 %, calcula:

a. La escala que pasa del plano original a la fotocopia ampliada.
b. La distancia entre dos puntos de la fotocopia, si en el plano original distan 18 cm.
c. La distancia en el plano original entre dos puntos, si en la fotocopia distan 21 cm.

03 Semejanza de triángulos

Como sucede con cualquier polígono, dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos homólogos iguales y sus lados homólogos proporcionales.



Así, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ de la figura son semejantes, dado que:

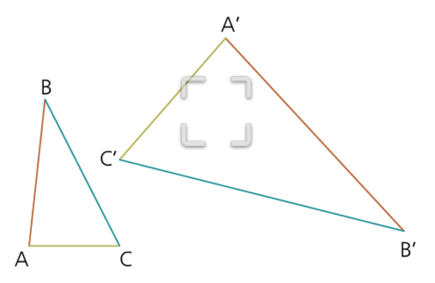
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \text{ y } \widehat{A}=\widehat{A'},\ \widehat{B}=\widehat{B'} \text{ y } \widehat{C}=\widehat{C'}$$

Sin embargo, para comprobar que dos triángulos son semejantes, no es necesario verificar que cumplen estas condiciones; basta con que cumplan uno de los siguientes criterios de semejanza.

Criterios de semejanza de triángulos

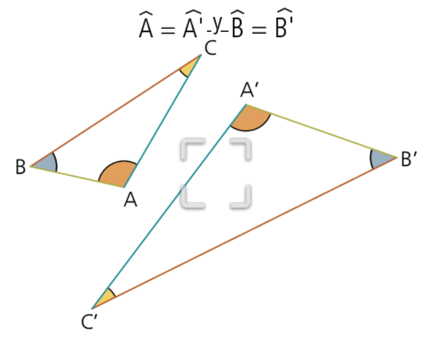
Dos triángulos son semejantes **si tienen los lados homólogos proporcionales:**

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$



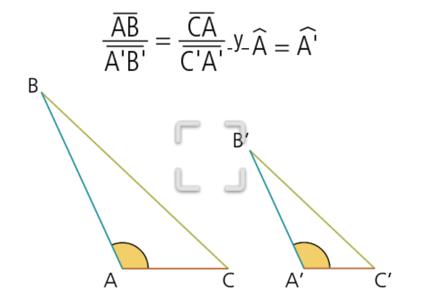
Dos triángulos son semejantes **si dos de sus ángulos homólogos son iguales:**

$$\widehat{A}=\widehat{A'} \text{ y } \widehat{B}=\widehat{B'}$$



Dos triángulos son semejantes **si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo que comprenden es igual:**

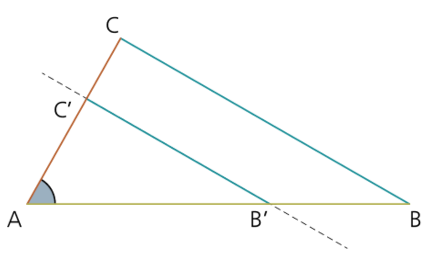
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \text{ y } \widehat{A}=\widehat{A'}$$



En el caso de que los triángulos sean rectángulos, los criterios de semejanza se reducen:

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales o un ángulo agudo igual.

Si en un triángulo, $\widehat{ABC}$, como el del margen, se traza por un punto cualquiera de uno de sus lados una recta paralela a otro lado, se obtiene un nuevo triángulo, $\widehat{AB'C'}$. A estos dos triángulos se los denominan **triángulos en posición de Tales,** pues las dos rectas secantes, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, están cortadas por dos rectas paralelas, $\overline{CB}$ y $\overline{C'B'}$, y, según el teorema de Tales, los segmentos que comprenden son proporcionales:



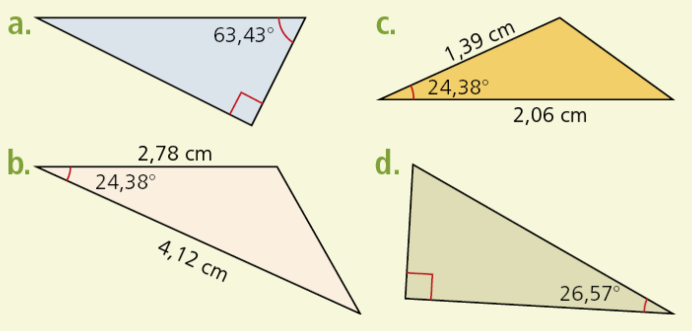
$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$$

Así, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AB'C'}$ tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual, por lo que se puede concluir que son semejantes.

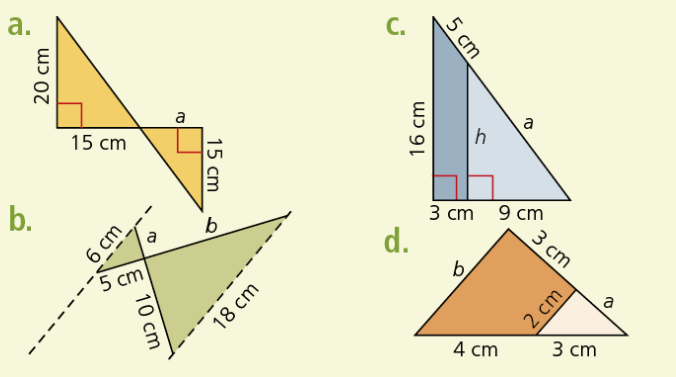
Los **triángulos en posición de Tales** son siempre semejantes.

ACTIVIDADES

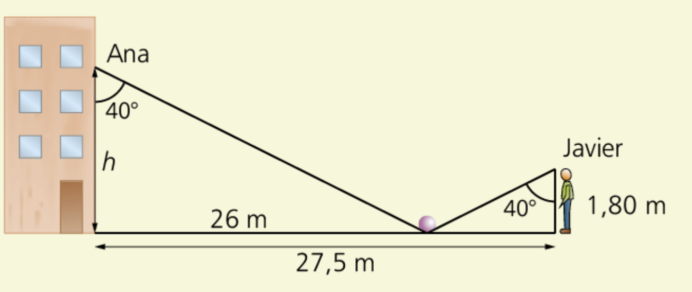
18 Determina cuáles de los siguientes triángulos son semejantes y explica por qué:



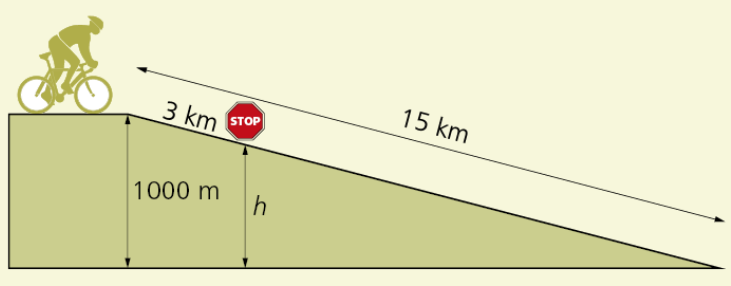
19 Halla el valor de las incógnitas que se indican en las siguientes figuras:



20 Desde la ventana de su habitación, Ana observa, bajo un ángulo de 40º, una pelota que se encuentra en la calzada a 26 m de su edificio. Justo en la acera de enfrente, su amigo Javier contempla la pelota bajo el mismo ángulo. Halla la altura a la que está la habitación de Ana sabiendo que la calle tiene 27,5 m de ancho y que Javier mide 1,80 m de alto.



21 Un ciclista parte de un punto situado a 1 000 m de altitud y desciende por una carretera recta de 15 km de longitud. Cuando ha recorrido 3 km sufre un pinchazo en una rueda y tiene que parar. ¿A qué altura se detiene?

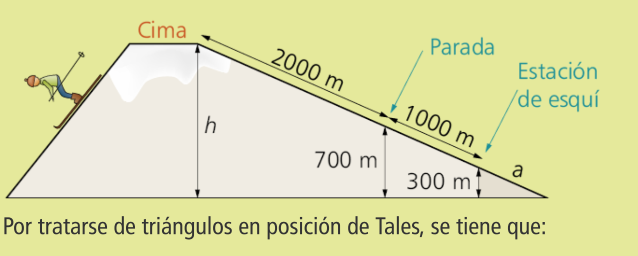


22 La luz de una farola incide sobre un arbusto de 1,75 m de alto situado a 3 m de ella. El arbusto proyecta una sombra de 50 cm. ¿Qué altura tiene la farola?

ACTIVIDAD RESUELTA

23 Juan toma un telesilla en una estación de esquí situada a 300 m de altura. Cuando el telesilla ha recorrido 1 000 m a lo largo de la ladera de la montaña, hace una parada, a 700 m de altura, para permitir que se apeen algunos esquiadores y suban otros. Después continúa la ascensión 2 000 m más hasta llegar a la cima de la montaña. ¿Qué altura tiene la montaña?

Se dibuja la situación:



Por tratarse de triángulos en posición de Tales, se tiene que:

$$\frac{a}{300}=\frac{a+1000}{700} \Rightarrow 700a=300a+300\,000$$

$$a=\frac{300\,000}{400}=750$$

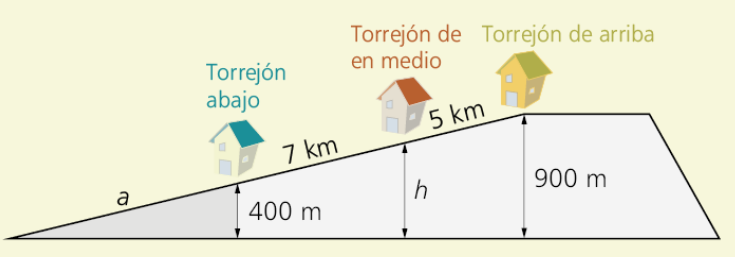
Volviendo a aplicar la semejanza de triángulos:

$$\frac{750}{300}=\frac{3\,750}{h} \Rightarrow 750h=1\,125\,000$$

$$h=\frac{1\,125\,000}{750}=1\,500$$

La montaña tiene una altura de 1 500 m.

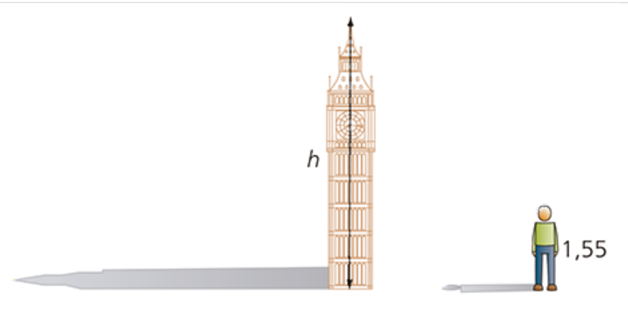
24 Las poblaciones de Torrejón de abajo, Torrejón de en medio y Torrejón de arriba están situadas en línea recta en la ladera de una montaña y separadas entre sí 7 km y 5 km, respectivamente, tal y como muestra la figura. Sabiendo que la altura a la que están localizados Torrejón de abajo y Torrejón de arriba es de 400 m y 900 m, respectivamente, calcula la altura a la que se encuentra Torrejón de en medio.



03.1 Aplicaciones de la semejanza de triángulos

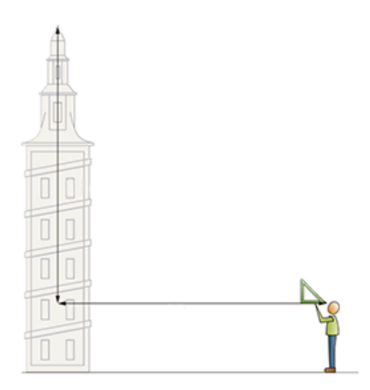
Existen varios métodos para medir la altura de objetos inaccesibles, todos ellos basados en la semejanza de triángulos.

1 Se mide la altura de un objeto vertical y la sombra que proyecta. Conviene que sea un objeto cualquiera no demasiado grande: una estaca, una valla, tú mismo…



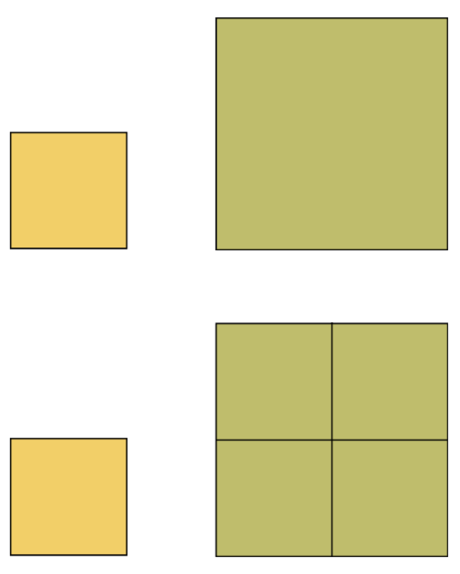
1 Un observador coloca un espejo en el suelo frente al objeto inaccesible (un árbol, por ejemplo) y se separa del espejo hasta que alcanza a ver la parte superior del objeto reflejada en él.

1 En este caso, el observador posiciona una escuadra verticalmente y, manteniendo uno de los catetos paralelo al suelo, alinea la visual con la hipotenusa y con la parte superior del objeto cuya altura desea medir.



1 El observador toma un pincel, se coloca frente al objeto y encuadra el objeto tapándolo con el pincel, de modo que la visual de sus ojos quede alineada con la parte superior del pincel y el punto más alto del objeto, por un lado, y con la parte inferior del pincel y el punto más bajo del objeto, por el otro.

04 Relación entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes



Observa los cuadrados dibujados en el margen. A simple vista puedes ver que son semejantes, pues tienen la misma forma (son polígonos regulares de 4 lados), pero distinto tamaño. Al ser semejantes, si mides cualquier longitud en una de las figuras, será proporcional a la longitud homóloga de la otra. En este ejemplo, cada lado del cuadrado mayor contiene **dos lados** del cuadrado menor; por tanto, la razón de semejanza es $k = \frac{2}{1} = 2$. Entonces, por la propia definición:

> Si dos cuerpos son semejantes con razón de semejanza *k*, **la razón de las longitudes** entre dos parejas de puntos homólogos cualesquiera sigue siendo *k*.

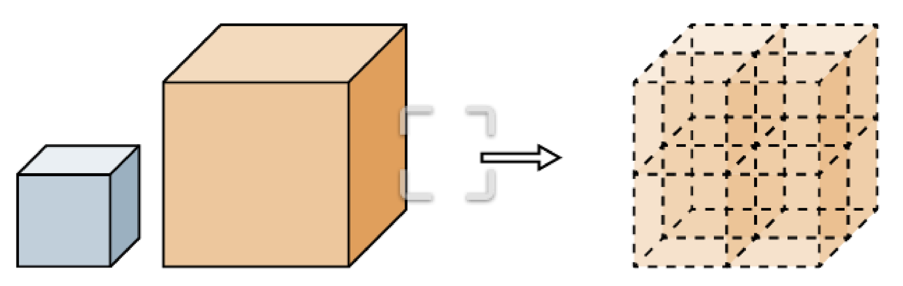
Pero ¿cuál será la razón de semejanza entre sus áreas?

En la figura se observa que el cuadrado mayor contiene *cuatro cuadrados* del cuadrado menor; en consecuencia, la razón entre sus áreas es $\frac{4}{1} = 4 = (2)^2 = k^2$. Es decir:

> Si dos cuerpos son semejantes con razón de semejanza *k*, **la razón de sus áreas** es k^2.

Por último, ¿qué sucede con el volumen de dos cuerpos semejantes?

Los siguientes cubos son semejantes, con una razón de semejanza k = 2.

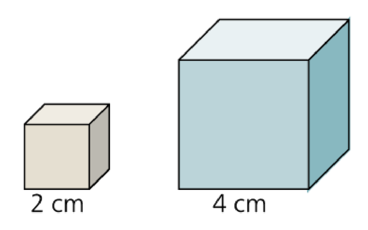


Para conocer cuál es la razón de semejanza de sus volúmenes, observa que el cubo mayor contiene ocho cubos del cubo menor; de este modo, la razón entre sus volúmenes es $\frac{8}{1} = 8 = (2)^3 = k^3$. Es decir:

> Si dos cuerpos son semejantes con razón de semejanza *k*, **la razón de sus volúmenes** es k^3.

ACTIVIDAD RESUELTA

Comprueba que se cumple la razón de los volúmenes en los siguientes cubos:



La razón de semejanza de los cubos es $k = \frac{4}{2} = 2$

Se calcula el volumen de los cubos:

$$V_{\text{cubo menor}} = l^3 = (2\ \text{cm})^3 = 8\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{cubo mayor}} = (l')^3 = (4\ \text{cm})^3 = 64\ \text{cm}^3$$

Y la razón de los volúmenes es:

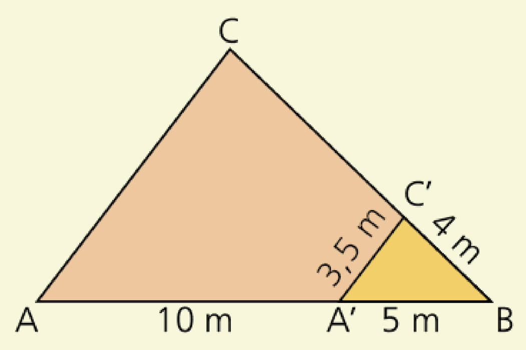
$$\frac{V_{\text{cubo mayor}}}{V_{\text{cubo menor}}} = \frac{64}{8} = 8 = 2^3 = k^3$$

ACTIVIDADES

32 Un rombo de diagonales 6 cm y 10 cm es semejante a otro rombo de diagonales 15 cm y 25 cm. ¿Cuál es la relación de semejanza entre sus áreas?

33 Un ortoedro de volumen 101,25 dm^3 es semejante a otro ortoedro de dimensiones 2 dm × 3 dm × 5 dm. Calcula la razón de semejanza entre estos ortoedros.

34 ¿Qué perímetro tiene el triángulo $\widehat{ABC}$ de la figura?

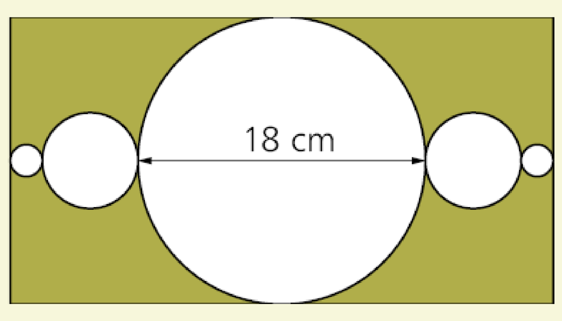


35 Los lados de un triángulo miden 3 cm, 9 cm y 12 cm, respectivamente. Determina los lados de un triángulo semejante al anterior cuyo perímetro es de 144 cm.

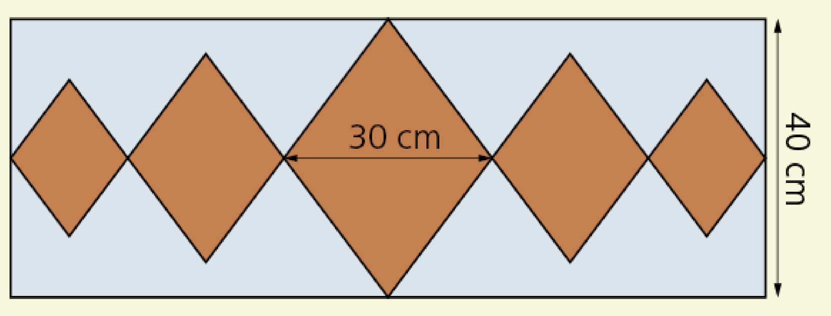
36 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 dm y 5 dm. Halla los lados de un triángulo semejante al anterior cuya superficie sea de 120 dm^2. ¿Cuánto vale la razón de semejanza?

37 Los lados de un rectángulo miden 3 cm y 4 cm, respectivamente. Calcula la diagonal de un rectángulo semejante al anterior cuya superficie sea de 27 cm^2.

38 ¿Cuál es el área de la zona coloreada si cada círculo es semejante al inmediatamente inferior en tamaño con una razón de semejanza $k = \frac{1}{3}$?

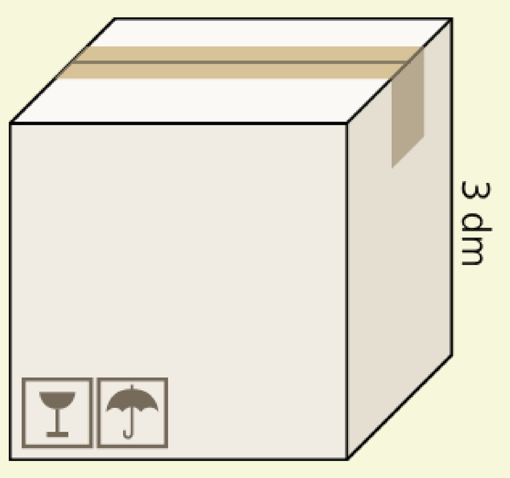


39 Una alfombra exhibe un dibujo geométrico como el de la imagen. En él, cada figura es semejante a la inmediatamente inferior en tamaño con una razón de semejanza $k = \frac{3}{4}$. Halla la superficie bordada de rojo.

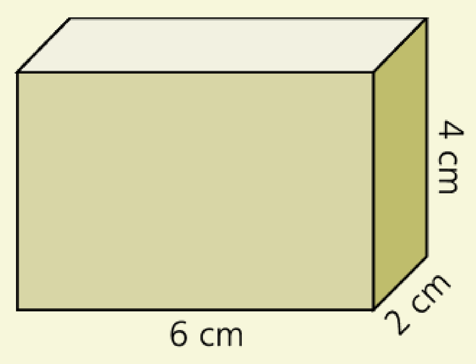


40 Averigua cuántos metros cuadrados de cartón se han empleado para construir tres cajas de regalo con forma de ortoedro, sabiendo que la mayor tiene por dimensiones 30 cm × 30 cm × 20 cm y cada una de ellas es semejante a la inmediatamente inferior en tamaño con razón de semejanza $k = \frac{4}{5}$.

41 ¿Cuántas cajas semejantes a la del dibujo, con una razón de semejanza $k = \frac{5}{6}$, se pueden construir con una plancha de cartón de 2 m^2?



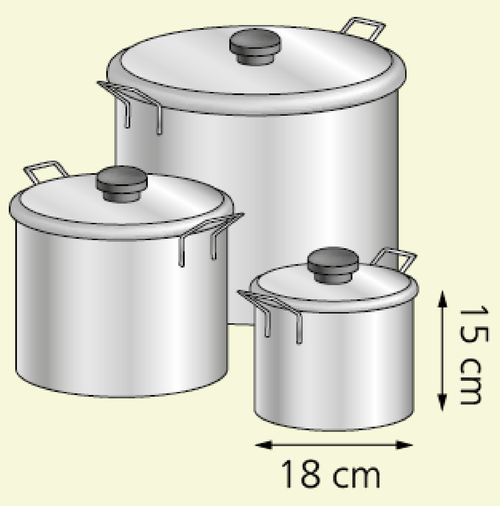
42 Calcula las dimensiones de un ortoedro semejante al de la figura y cuyo volumen sea de 384 cm^3:



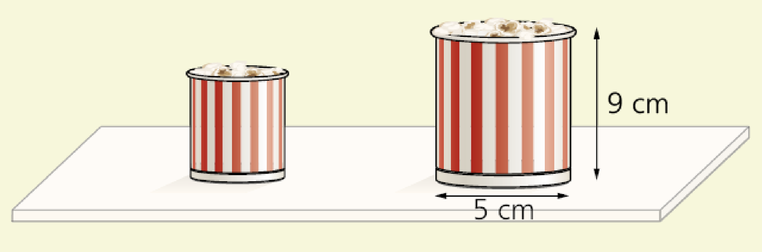
43 La pirámide del museo del Louvre es una pirámide cuadrangular regular de 20,6 m de altura, cuya base tiene 35 m de lado. Determina las dimensiones (lado de la base y altura) que debe tener una maqueta a escala si se desea que tenga un volumen de 70 dm^3.

44 El domo de proyecciones del Centro Cultural de Tijuana (México) es una esfera casi perfecta cuyo círculo máximo tiene 2 200 m^2. ¿Qué radio debe tener una maqueta a escala para que la superficie del círculo máximo sea de 88 dm^2? ¿A qué escala se ha hecho la maqueta?

45 Calcula la capacidad total, en litros, de las tres ollas de esta batería de cocina si cada una de ellas es semejante a la inmediatamente superior en tamaño, con una razón de semejanza $k = \frac{4}{3}$.

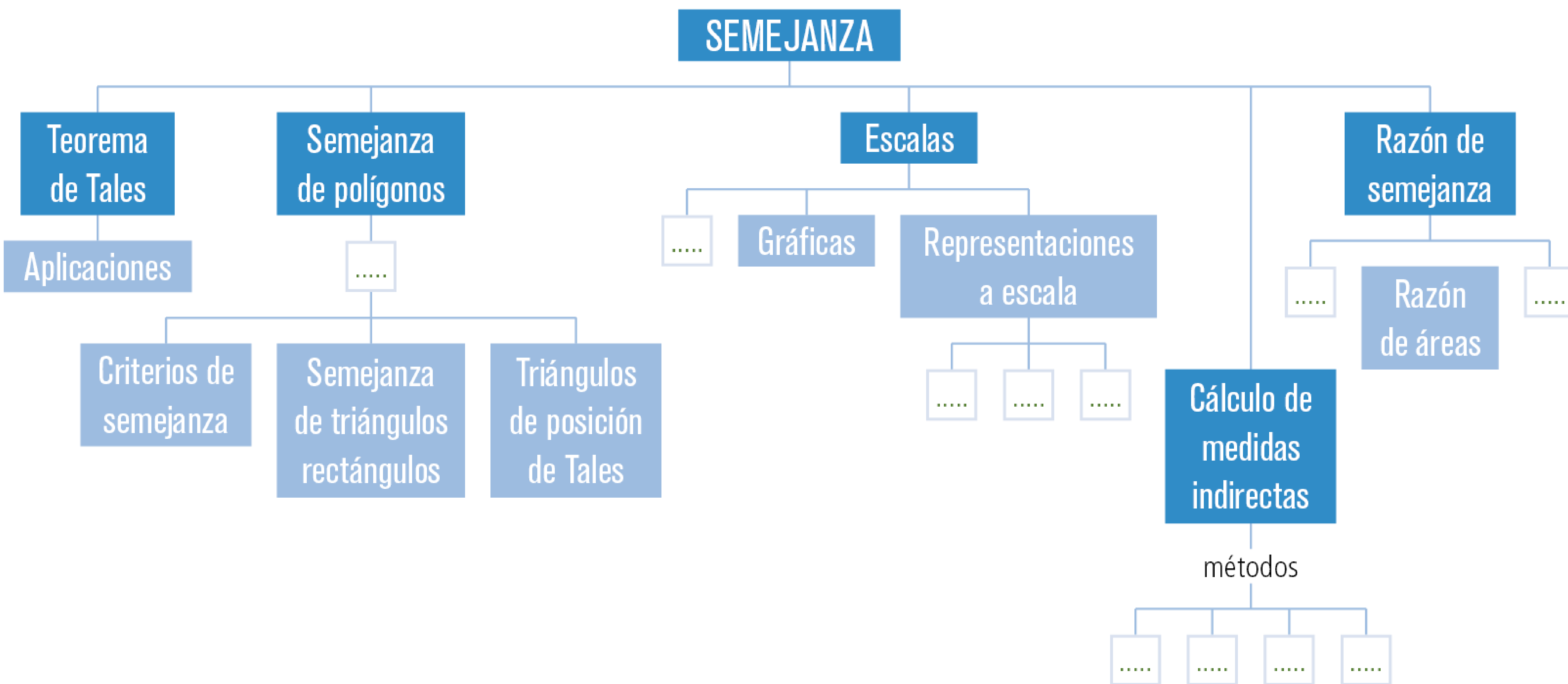


46 En un anuncio publicitario se observan dos vasos de palomitas de diferentes tamaños, y un cartel que dice que son semejantes entre sí con una razón de semejanza $k = \frac{3}{5}$. Suponiendo que las palomitas se sirvieran a ras del borde del vaso, halla el volumen que cabe en el vaso pequeño.



APRENDO A APRENDER

Copia en tu cuaderno este mapa conceptual, complétalo y responde a las cuestiones que aparecen a continuación:



ACTIVIDADES

1 ¿Qué afirma el teorema de Tales? Asegúrate de conocer y aplicar correctamente el procedimiento de división de un segmento en partes proporcionales.

2 ¿Cuándo se dice que dos figuras son semejantes? ¿Cómo se aplica esto cuando se trata de polígonos?

3 ¿Qué es la razón de semejanza?

4 ¿Cuándo son semejantes dos triángulos? ¿Qué criterios de semejanza conoces? Pon ejemplos de cada uno.

5 ¿Cómo se simplifican estos criterios cuando se trata de triángulos rectángulos? ¿Por qué?

6 ¿Qué son los triángulos en posición de Tales? ¿Qué propiedad cumplen?

7 ¿Qué es una escala? ¿Cómo se determina?

8 ¿Qué tipos de escalas hay? Pon un ejemplo de cada una de ellas.

9 ¿Qué tipo de representaciones a escala conoces? Enumera cada una y pon un ejemplo.

10 Inventa tu propia escala y explica, mediante un ejemplo sencillo, cómo pasar de la medida real a la representación a escala, y viceversa.

11 Dada una representación a escala y la medida real, explica cómo hallar y expresar la escala que permite pasar de una a la otra. Ayúdate con un ejemplo sencillo.

12 ¿Qué métodos de cálculo de medidas indirectas conoces? Describe paso a paso cada uno de estos métodos. Ayúdate con un ejemplo concreto.

13 Haced una pequeña investigación sobre los métodos de medición indicados en la unidad. Intentad averiguar quién, cómo y cuándo los utilizó por primera vez.

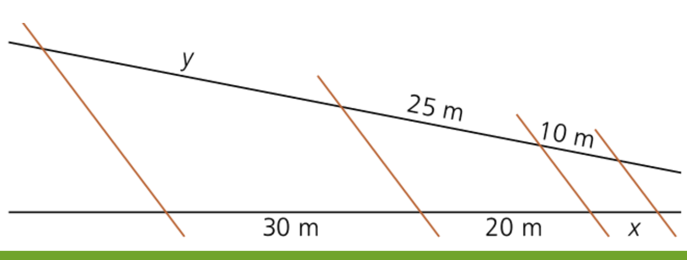
14 ¿Cómo es la razón de semejanza en el caso de longitudes, áreas o volúmenes de figuras semejantes a una dada? Pon un ejemplo que ilustre cada situación.

REPASO FINAL

TEOREMA DE TALES

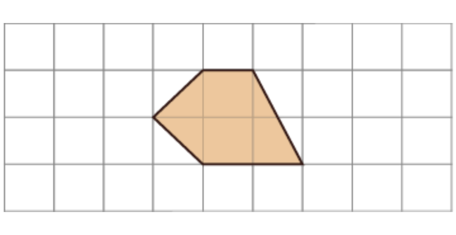
1 Dibuja en tu cuaderno un segmento, $\overline{AB}$, de 6 cm de longitud y divídelo en 8 partes iguales. Después, dibuja otro segmento, $\overline{CD}$, de 10 cm de longitud y divídelo en tres partes proporcionales a 2, 4 y 6.

2 Halla el valor de las incógnitas que se indican en la siguiente figura:

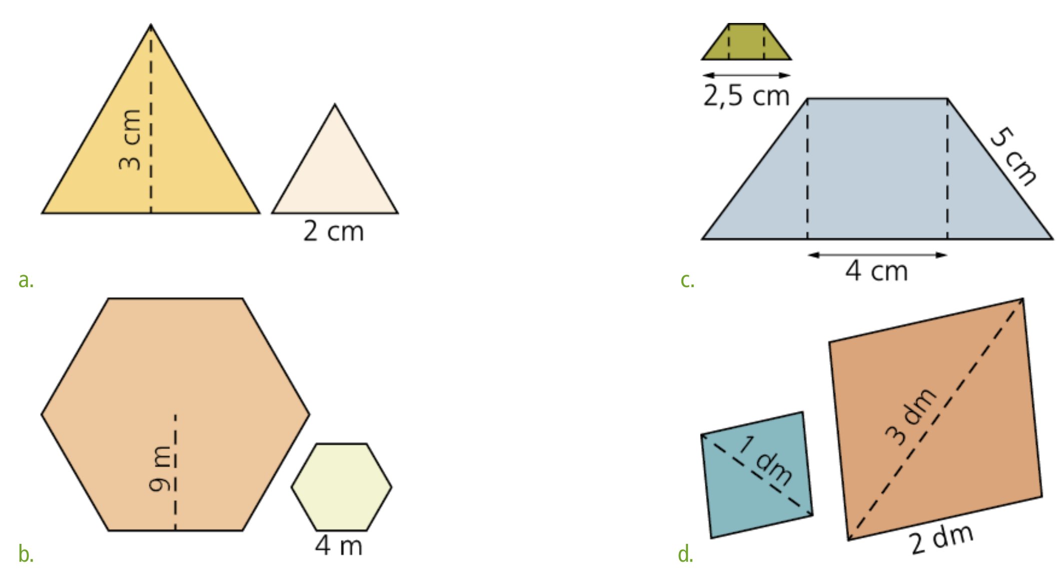


FIGURAS SEMEJANTES

3 Dibuja un polígono semejante al de la figura, con una razón de semejanza $k = \frac{5}{2}$.



4 Dados los siguientes polígonos, calcula la razón de semejanza que permite pasar del primero al segundo:



5 Añade en tu cuaderno una escala gráfica adecuada a cada uno de estos casos:

Longitud real del puente: 3 km

Distancia real entre los dos puntos: 800 m

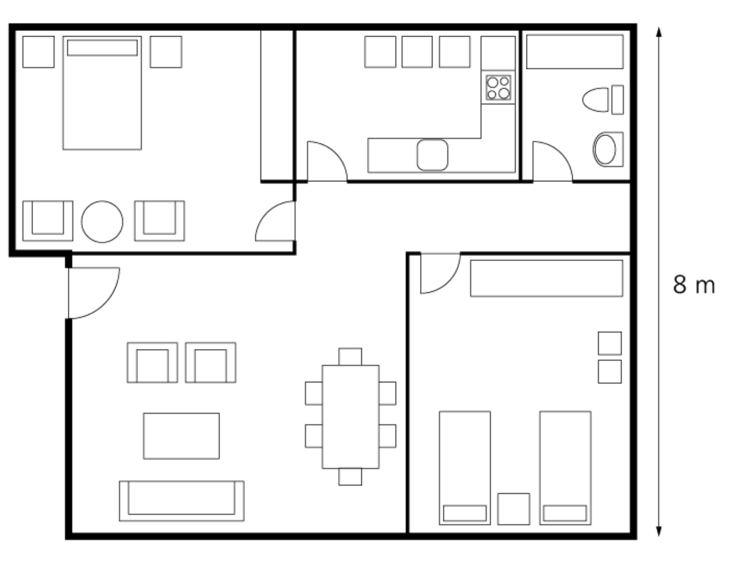
6 Un mapa está hecho a escala 1:300 000.

a. ¿Qué distancia separa en la realidad dos puntos que en el mapa distan 2,5 cm?
b. ¿Qué distancia separará en el mapa dos puntos que en la realidad se encuentran a 345 km?

7 Haz una fotocopia ampliada un 30 % de un plano de carreteras.

a. ¿Cuánto distan en la ampliación dos puntos que en el plano están a 12 cm?
b. ¿Qué separación hay en el plano entre dos puntos que en la ampliación están a 6 cm?
c. ¿Cuál es el factor de escala que permite pasar del original a la fotocopia?

8 Pablo ha hecho un plano a escala de su casa como el de la siguiente figura.



a. ¿Qué escala ha aplicado?
b. Calcula la superficie real de cada habitación.

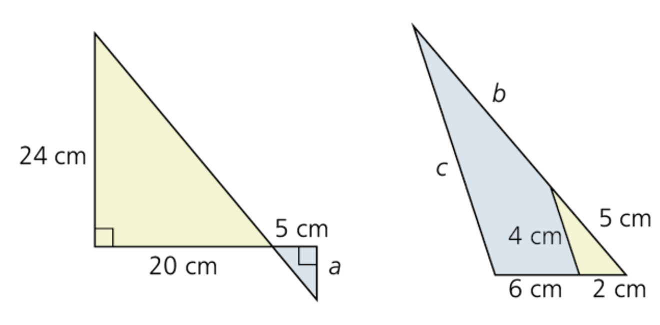
9 Una maqueta del *Airbus* 320 está hecha a escala 1:157. Calcula la longitud real del avión sabiendo que la maqueta tiene 45 cm de largo.

10 Averigua la escala que se ha aplicado en las distintas situaciones.

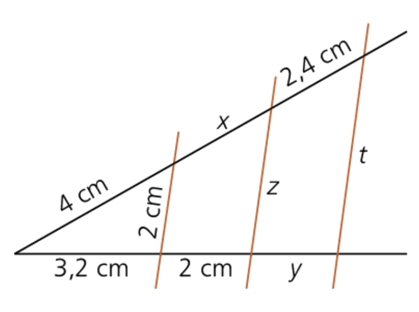
a. Distancia real entre dos ciudades: 350 km; distancia en el mapa: 40 cm.
b. Altura de la maqueta de un edificio: 45 cm; altura real: 15 m.
c. Longitud del salón en el plano de una casa: 12 cm; longitud real: 8 m.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

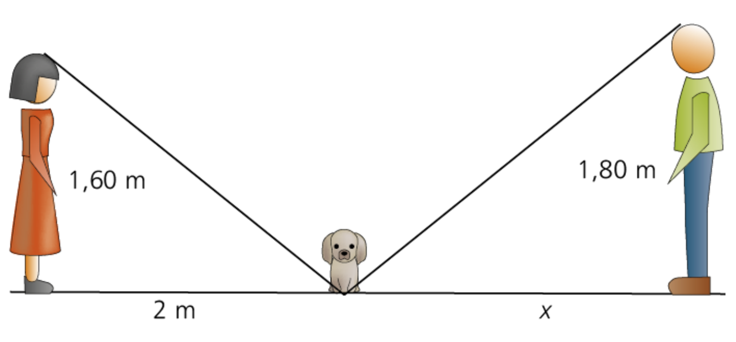
11 Halla el valor de *a*, *b* y *c* en las siguientes figuras:



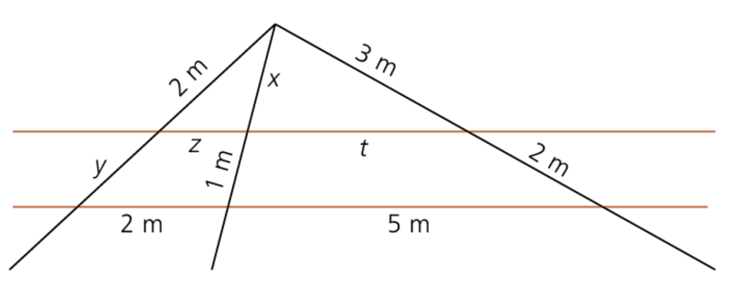
12 Determina el valor de las incógnitas que se indican en la figura.



13 Una señora de 1,60 m de alto contempla a su perro, situado a 2 m de ella, bajo el mismo ángulo que su marido, que está justo enfrente de ellos en línea recta. Calcula la distancia que separa al matrimonio, sabiendo que el marido mide 1,80 m de altura.

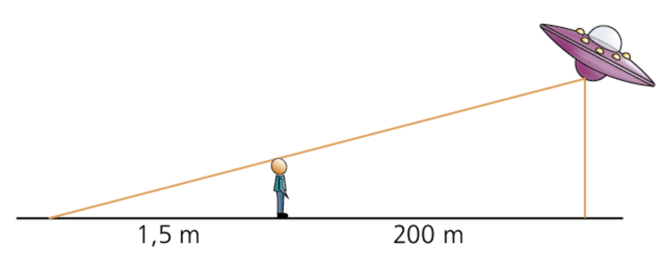


14 Halla el valor de las incógnitas que se indican en la siguiente figura:



15 Calcula la longitud de la sombra que proyecta un edificio de 126 m de altura si a la misma hora del día un hombre de 1,80 m de estatura proyecta una sombra de 1,20 m.

16 Melvin ha descubierto un ovni en el cielo nocturno. Desde el ovni emergen dos rayos de luz: uno vertical que incide en el suelo a 200 m de Melvin y otro que roza tangencialmente la cabeza del niño e incide en el suelo a 1,5 m de él. Calcula a qué altura se encuentra el ovni si Melvin mide 1,75 m.

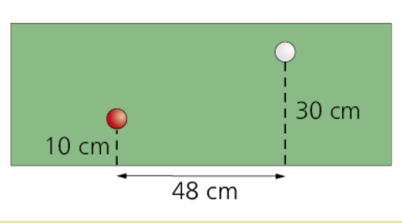


17 Halla la sombra que proyecta un lápiz de 20 cm de longitud si se coloca verticalmente a la luz de un flexo de 50 cm de alto y a 10 cm de su pie.

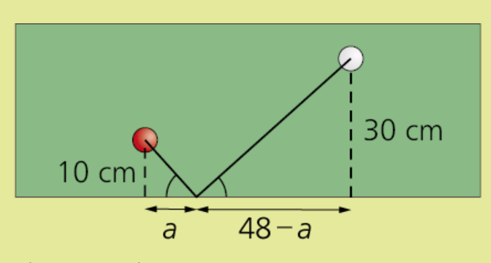
18 En un día festivo, la familia Martínez sale a practicar atletismo en una pista forestal recta que recorre la ladera de una montaña. Cuando llevan recorridos 4 km hacen un alto para descansar. Determina a qué altura se encuentran en ese momento, teniendo en cuenta que la altura total de la montaña es de 800 m y que su ladera mide 7 km.

ACTIVIDAD RESUELTA

19 Calcula el punto de la banda de la mesa de billar en el que debe rebotar la bola roja para golpear a la bola blanca.



Se dibuja la trayectoria de la bola roja, teniendo en cuenta que el ángulo con el que incide en la banda ha de ser igual al ángulo con el que rebota.



Los dos triángulos que resultan son semejantes por ser rectos y tener un mismo ángulo agudo. Por tanto:

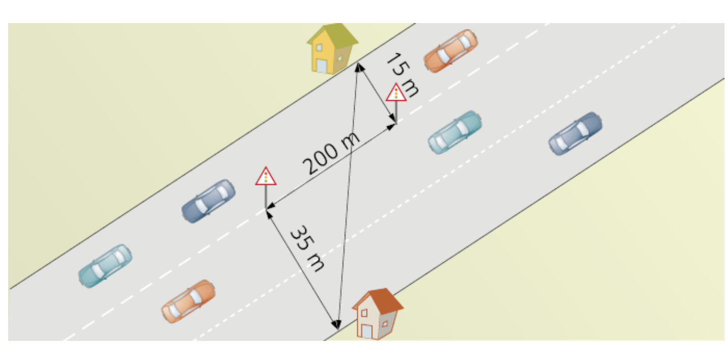
$$\frac{a}{10} = \frac{48-a}{30} \Rightarrow 30a = 480 - 10a$$

$$40a = 480 \Rightarrow a = 12$$

La bola roja debe rebotar en la banda a 12 cm de su vertical.

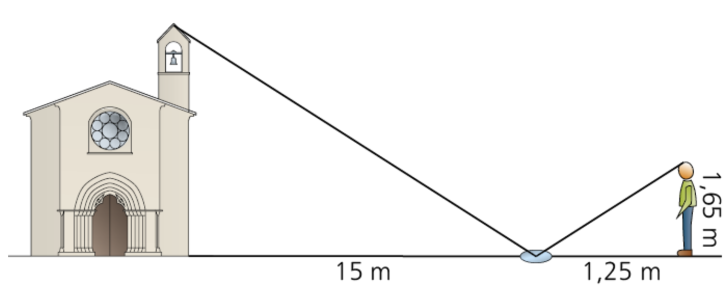
20 Iván y Laura juegan con una pelota. Si Laura lanza la pelota contra el suelo, calcula a qué distancia de ella debe rebotar para que llegue donde se encuentra Iván, teniendo en cuenta que las estaturas de Laura e Iván son 1,50 m y 1,20 m, respectivamente, y que la distancia que los separa es de 7 m.

21 ¿Qué distancia en línea recta separa las dos casas?



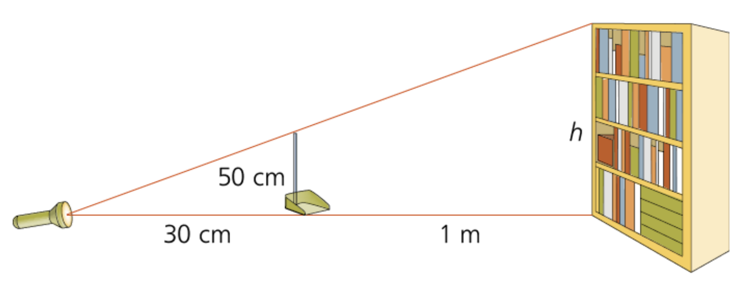
22 Para medir la altura de una iglesia, Santiago procede del siguiente modo:

Coloca un espejo en el suelo a 15 m de la fachada y se aleja del espejo 1,25 m en línea recta, hasta ver reflejada en él la parte superior del campanario de la iglesia. Con estos datos, y sabiendo que su propia estatura es de 1,65 m, Santiago deduce la altura de la iglesia. ¿Cómo lo ha hecho?



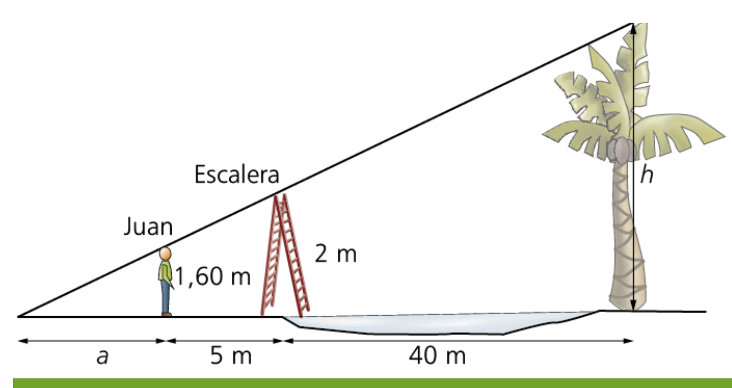
23 Para medir la altura de la estantería de su habitación, David hace lo siguiente:

Coloca un recogedor de 50 cm de alto a 1 m de la estantería. A continuación, pone una linterna en el suelo de manera que el extremo de la sombra que proyecta el recogedor coincida con la parte superior de la estantería. Finalmente, mide la distancia entre la linterna y el recogedor, que resulta ser de 30 cm. ¿Qué razonamiento ha seguido? ¿Sabrías tú calcular la altura?



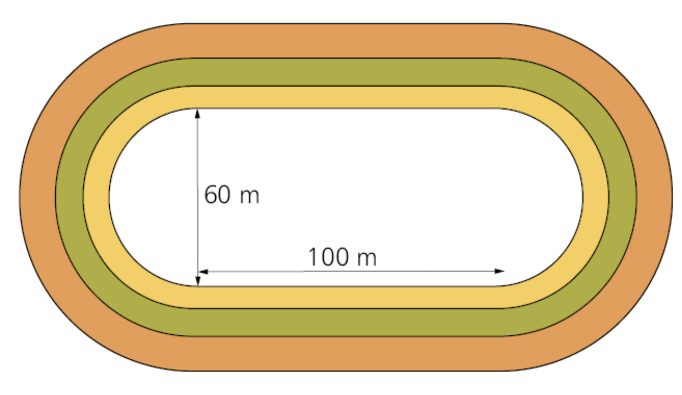
24 Elena se sitúa a 3 m de la valla de su colegio, que mide 4 m, y ve la azotea del edificio alineada con la parte superior de la valla. Calcula la altura que tiene el colegio si se encuentra a 20 m de la valla y sabiendo que Elena mide 1,70 m.

25 Juan quiere coger cocos de una palmera que está al otro lado de un río de 40 m de ancho. Dispone de una escalera de caballete que abierta alcanza 2 m de altura. Antes de cruzar el río, quiere asegurarse de que podrá alcanzar los cocos que están en la copa de la palmera, para lo cual coloca la escalera en el borde del río y se separa de ella 5 m hasta que ve la parte superior de la palmera alineada con la escalera. Averigua si Juan debe cruzar o no el río si tiene una estatura de 1,60 m.



RELACIÓN ENTRE LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS SEMEJANTES

26 Una pista de atletismo cuenta con tres calles. La calle interior consta de dos tramos rectos de 100 m cada uno y dos tramos semicirculares de 60 m de diámetro. Calcula la longitud de cada calle de la pista, sabiendo que son semejantes entre sí con una razón de semejanza $k = \frac{5}{4}$.

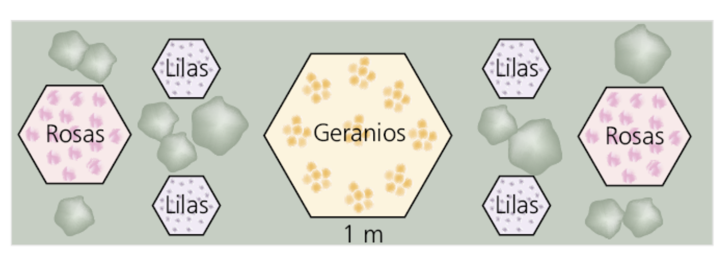


27 Una sala de fiestas consta de dos salones semejantes de forma rectangular. El salón pequeño tiene unas dimensiones de 10 m × 12 m, mientras que el grande tiene una superficie de 180 m^2. Halla las dimensiones del salón grande.

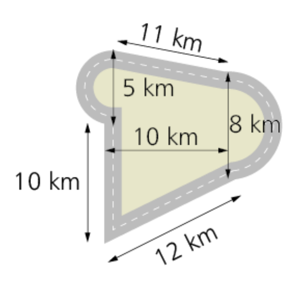
28 Un pabellón polideportivo cuenta con dos piscinas semejantes. La piscina de adultos es un ortoedro de dimensiones 25 m × 40 m × 2,5 m. La piscina infantil, por su parte, tiene una capacidad de 312,5 m^3. Calcula:

a. Las dimensiones de la piscina infantil.
b. El coste total de pintar ambas piscinas con pintura impermeable a 3 €/m^2.

29 En un jardín rectangular se desea construir 7 parterres para flores con forma hexagonal regular. Determina la superficie plantada de cada tipo de planta si los parterres son semejantes al inmediatamente inferior en tamaño con una razón de semejanza $k = \frac{3}{5}$.

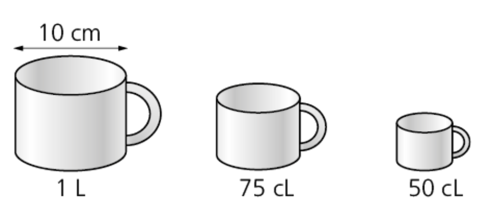


30 Un circuito de fórmula 1 tiene esta forma:



a. Si los coches deben dar 12 vueltas al circuito durante la carrera, ¿cuántos kilómetros recorrerán en total?
b. La zona interior está plantada de césped. ¿Qué superficie ocupa si se sabe que es semejante al circuito con una razón de semejanza $k = \frac{2}{3}$?

31 En una chocolatería cuentan con tres tazas medidoras como los que muestra el dibujo:

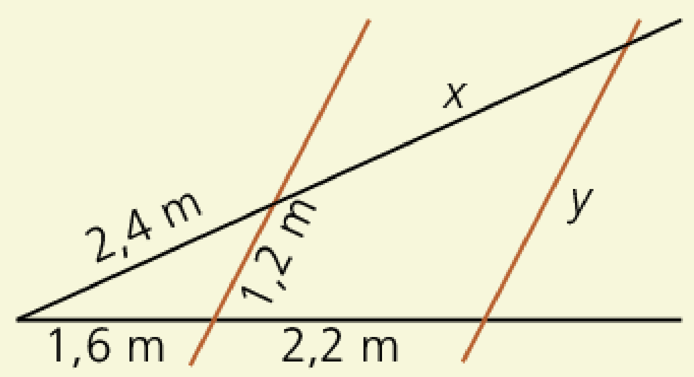


Calcula:

a. La altura que tiene la taza de un litro.
b. Las dimensiones (diámetro de la base y altura) que han de tener las otras dos tazas, sabiendo que son semejantes al primero.

EVALUACIÓN

1 Observa el dibujo:



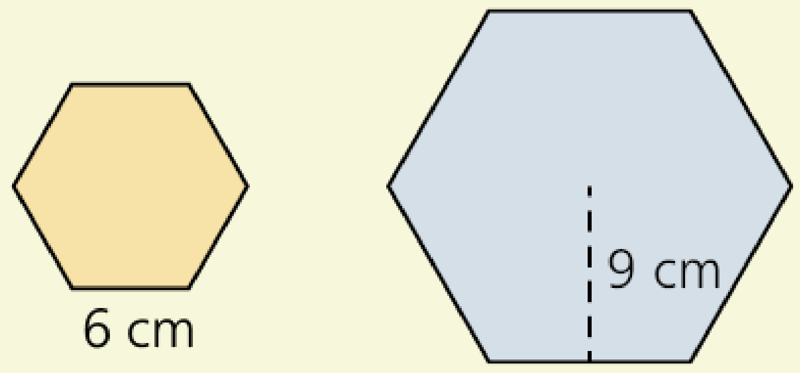
El valor de la incógnita x es:

a. 6,6 m b. 33 m c. 3,3 m d. 0,33 m

El valor de la incógnita y es:

a. 2,5 m b. 2,85 m c. 28,5 m d. 2,58 m

2 La razón de semejanza que permite pasar del primer hexágono al segundo es:



a. 0,58 b. 1,5 c. 0,67 d. 1,73

3 Una maqueta de un edificio de 20 m de altura mide 40 cm. La escala aplicada es:

a. 1:100 b. 1:2 c. 1:50 d. 1:10

4 Un conductor baja un puerto, situado a 900 m de altura, por una carretera recta de 10 km de longitud. Cuando ha recorrido 4 km se detiene a repostar en una gasolinera. La altura a la que se encuentra la gasolinera es:

a. 540 m b. 600 m c. 560 m d. 640 m

5 Un tanque cilíndrico de 10 m de diámetro y 15 m de altura es semejante a otro de 75π m^3 de volumen. La altura del tanque semejante es:

a. 75 m b. 0,3 m c. 8,77 m d. 37 m

6 Una caja de cartón tiene forma de ortoedro de dimensiones 0,5 m × 0,25 m × 0,75 m. La cantidad de cartón que se emplea en fabricar otra caja semejante con una razón de semejanza $k = \frac{2}{5}$, es:

a. 0,22 m^2 c. 0,015 m^2

b. 0,0375 m^2 d. 0,55 m^2

DIARIO DE APRENDIZAJE

¿Se ha correspondido mi interpretación de las imágenes del inicio de la unidad con el contenido que he estudiado en ella? De no ser así, ¿con qué imágenes ilustraría yo la presentación?