MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

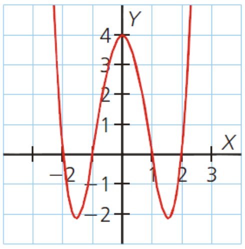
Unidad 10. Características globales de las funciones

Unidad 10. Características globales de las funciones

SOLUCIONES PÁG. 223

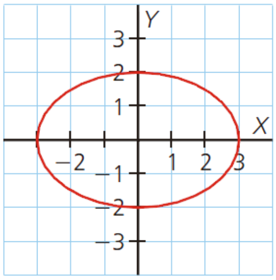
1 Indica cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función:

a.



Sí es función, porque la relación entre las variables x e y es de forma que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde un único valor de la variable dependiente, y.

b.



No es función, porque la relación entre las variables x e y es de forma que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde varios valores de la variable dependiente, y.

2 Halla la expresión algebraica correspondiente a las siguientes funciones definidas mediante un enunciado:

a. A cada número se le asigna el cuadrado de su consecutivo.

$f(x) = (x + 1)^2$

b. El volumen de una esfera de radio *r*.

$f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

c. El espacio recorrido en un tiempo, *t*, por un móvil que circula a 60 km/h.

$f(t) = 60t$

d. El área de un triángulo equilátero de lado *l*.

$f(l) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$

3 Expresa de todas las maneras posibles la función que asocia:

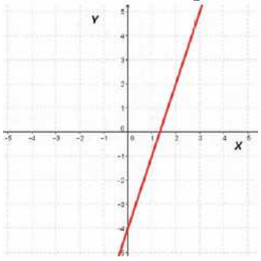
a. A cada número su triple disminuido en cuatro unidades.

Mediante una expresión algebraica: $f(x) = 3x - 4$

Mediante una tabla de valores:

x	−2	−1	0	2	3
$y = f(x)$	−10	−7	−4	2	5

Mediante una gráfica:



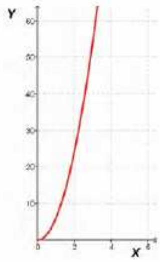
b. A la arista de un cubo su área.

Mediante una expresión algebraica: $f(x) = 6x^2$

Mediante una tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	0	6	24	54	96

Mediante una gráfica:



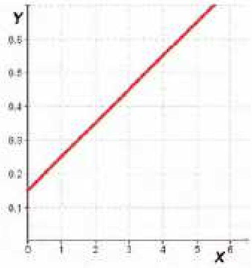
c. Al número de minutos que dura una llamada telefónica el coste de la llamada, sabiendo que el establecimiento de llamada es de 0,15 € y que cada minuto cuesta 0,10 €.

Mediante una expresión algebraica: $f(x) = 0{,}10x + 0{,}15$

Mediante una tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55

Mediante una gráfica:



4 Expresa, mediante un enunciado y una tabla de valores, la función: f (x) = $\frac{3x}{x-1}$

Mediante un enunciado: a cada número se le asocia el cociente de su triple entre su anterior.

Mediante una tabla de valores:

x	-2	-1	0	2	4
y = f (x)	2	$\frac{3}{2}$	0	6	4

5 Halla las imágenes, si existen, de los valores $x = -2$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = 0$ y $x = 3$ para las siguientes funciones:

a. **f (x) = $3x^2 + 6x$**

f (–2) = 0

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$

f (0) = 0

f (3) = 45

b. **f (x) = $\frac{4x}{3x+2}$**

f (–2) = 2

No existe $f\left(-\frac{2}{3}\right)$

f (0) = 0

$f(3) = \frac{12}{11}$

c. **f (x) = $\sqrt{4x+3}$**

No existe f (–2)

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(0) = \sqrt{3}$

$f(3) = \sqrt{15}$

d. **f (x) = $\frac{5}{x^2-9}$**

f (–2) = –1

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{45}{77}$

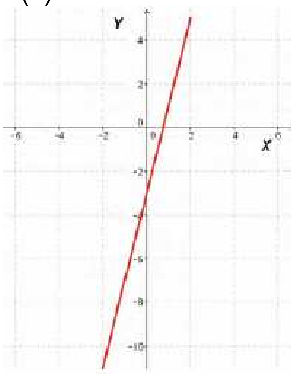
$f(0) = -\frac{5}{9}$

No existe f (3)

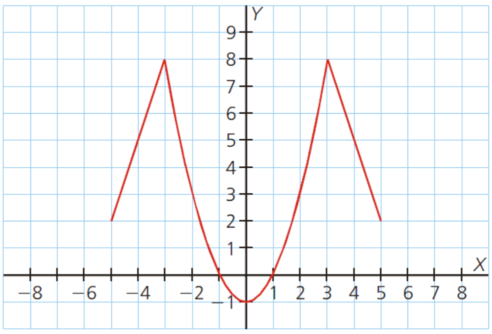
6 A partir de esta tabla de valores, obtén su expresión algebraica y dibuja su representación gráfica:

x	–2	–1	0	1	2
y	–11	–7	–3	1	5

f $(x) = 4x - 3$



7 Elabora una tabla de valores que se corresponda con la siguiente gráfica:

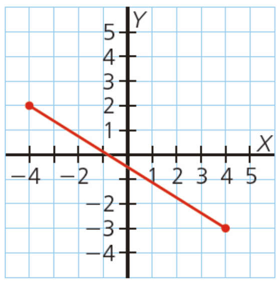


x	–5	–4	–1	0	2	3
y	2	5	0	–1	3	8

SOLUCIONES PÁG. 224

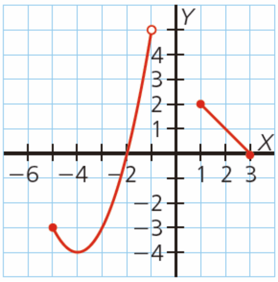
8 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a.



D (f) = [–4 , 4]; R (f) = [–3 , 2]

b.



D (f) = [–5 , –1) ∪ [1 , 3]; R (f) = [–4 , 5)

9 Comprueba si los valores $x = –2$, $x = 0$ y $x = 3$ pertenecen al dominio de las siguientes funciones:

a. f (x) = $2x^3 – 4$

Se sustituyen los valores de x en la función.

f (–2) = $2 \cdot (–2)^3 – 4 = 2 \cdot (–8) – 4 = –20 \Rightarrow$ Sí pertenece al dominio.

f (0) = $2 \cdot 0^3 – 4 = –4 \Rightarrow$ Sí pertenece al dominio.

f (3) = $2 \cdot 3^3 – 4 = 54 – 4 = 50 \Rightarrow$ Sí pertenece al dominio.

b. f (x) = $\sqrt{2x-5}$

f (–2) = $\sqrt{2\cdot(-2)-5}=\sqrt{-9}$ $\Rightarrow$ Como la raíz es negativa, x = 2 no pertenece al dominio.

f (0) = $\sqrt{2\cdot 0-5}=\sqrt{-5}$ $\Rightarrow$ Como la raíz es negativa, x = 0 no pertenece al dominio.

f (3) = $\sqrt{2\cdot 3-5}=\sqrt{1}=\pm 1$ $\Rightarrow$ Como la raíz es positiva, x = 3, sí pertenece al dominio.

10 Determina el dominio de estas funciones:

a. f (x) = $3x^2 + 5x – 1$

La expresión algebraica de la función es un polinomio. Por lo tanto, es dominio son todos los números reales. D (f) = $\mathbb{R}$

b. f (x) = $\dfrac{2x}{3x-1}$

Como la expresión algebraica de la función, $f(x)=\dfrac{2x}{3x-1}$, tiene x en el denominador, la función no está definida cuando el denominador se anula. Para determinar los valores de x en los que se anula el denominador, se iguala a cero el denominador y se resuelve la ecuación:

$3x – 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Por tanto, el dominio de la función es el conjunto de los números reales menos $\dfrac{1}{3}$. D (f) = $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

c. f (x) = $\sqrt{3-6x}$

Como la expresión algebraica de la función, f (x) = $\sqrt{3-6x}$, tiene x bajo un radical de índice par, la función solo está definida si el radicando es positivo o nulo. Para determinar los valores de x que hacen que el radicando sea positivo o nulo, se resuelve la inecuación:

$3-6x \geq 0 \Rightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$

Por tanto, el dominio de la función es el conjunto de los números reales menores o iguales que $\dfrac{1}{2}$. D (f) = $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$

d. f (x) = $\dfrac{-1}{4x^2+4}$

Como la expresión algebraica de la función, f (x) = $\dfrac{-1}{4x^2+4}$, tiene x en el denominador, la función no está definida cuando el denominador se anula. Para determinar los valores de x en los que se anula el denominador, se iguala a cero el denominador y se resuelve la ecuación:

$4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

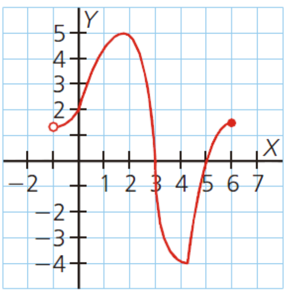
Como el denominador no se anula, el dominio de la función son todos los números reales. D (f) = $\mathbb{R}$

Por tanto, el dominio de la función es el conjunto de los números reales menos $\dfrac{1}{3}$. D (f) = $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

SOLUCIONES PÁG. 225

11 Determina, para estas funciones, el dominio, el recorrido y los puntos de corte con los ejes.

a.

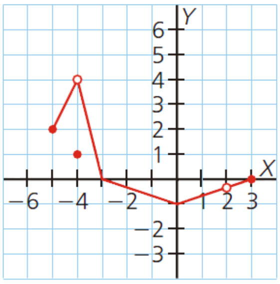


D (f) = (–1 , 6]; R (f) = [–4 , 5]

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje *X:* (3 , 0) y (5 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , 2)

b.



D (f) = [–5 , 2) ∪ (2 , 3]; R (f) = [–1 , 4)
Puntos de corte con los ejes:
• Con el eje *X:* (–3 , 0) y (3 , 0)
• Con el eje *Y:* (0 , –1)

12 Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a. f (*x*) = –5*x* + 2

- Con el eje *X:*
  Como $y = f(x) = 0 \Rightarrow -5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$. Por lo tanto, la función tiene un punto de corte con el eje *X:* $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$
- Con el eje *Y:*
  Como $x = 0 \Rightarrow y = f(0) \Rightarrow y = -5 \cdot 0 + 2 = 2$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es (0 , 2)

b. f (*x*) = *x*² – 4

- Con el eje *X:*
  Como $y = f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Por lo tanto, la función tiene dos puntos de corte con el eje *X:* (–2 , 0) y (2 , 0)
- Con el eje *Y:*
  Como $x = 0 \Rightarrow y = f(0) \Rightarrow y = 0^2 - 4 = -4$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es (0 , –4)

c. $\mathbf{f(x) = \frac{-5}{2x+6}}$

- Con el eje *X:*
  Como $y = f(x) = 0 \Rightarrow$ La función no tiene ningún punto de corte con el eje *X.*
- Con el eje *Y:*
  Como $x = 0 \Rightarrow y = f(0) \Rightarrow y = \frac{-5}{2 \cdot 0 + 6} = \frac{-5}{6}$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es $\left(0, \frac{-5}{6}\right)$

d. $\mathbf{f(x) = \frac{x-3}{x+1}}$

- Con el eje *X:*
  Como $y = f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Por lo tanto, la función tiene un punto de corte con el eje *X:* (3 , 0)
- Con el eje *Y:*
  Como $x = 0 \Rightarrow y = f(0) \Rightarrow y = \frac{0-3}{0+1} = -3$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es (0 , –3)

e. $\mathbf{f\,(\boldsymbol{x}) = \sqrt{3\boldsymbol{x}+4}}$

- Con el eje *X:*

  Como y = f (x) = 0 $\Rightarrow$ $\sqrt{3x+4}=0 \Rightarrow 3x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-4}{3}$. Por lo tanto, la función tiene un punto de corte con el eje *X:* $\left(\frac{-4}{3},0\right)$

- Con el eje *Y:*

  Como x = 0 $\Rightarrow$ y = f (0) $\Rightarrow$ y = $\sqrt{3\cdot 0+4}=\sqrt{4}=2$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es (0 , 2)

f. $\mathbf{f\,(\boldsymbol{x}) = \frac{3\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2+9}}$

- Con el eje *X:*

  Como y = f (x) = 0 $\Rightarrow$ $\frac{3x}{x^2+9}=0$ $\Rightarrow$ $3x$ = 0 $\Rightarrow$ x = 0. Por lo tanto, la función tiene un punto de corte con el eje *X:* (0 , 0)

- Con el eje *Y:*

  Como x = 0 $\Rightarrow$ y = f (0) $\Rightarrow$ y = $\frac{3\cdot 0}{0^2+9}=0$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es (0 , 0)

g. $\mathbf{f\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3 - 6\boldsymbol{x}^2 + 9\boldsymbol{x}}$

- Con el eje *X:*
  Como y = f (x) = 0 $\Rightarrow$ $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ $\Rightarrow$ x = 0 y x = 3. Por lo tanto, la función tiene dos puntos de corte con el eje *X:* (0 , 0) y (3 , 0)
- Con el eje *Y:*
  Como x = 0 $\Rightarrow$ y = f (0) $\Rightarrow$ y = 0. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es (0 , 0)

h. $\mathbf{f\,(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{\boldsymbol{x}}}$

- Con el eje *X:*

  Como y = f (x) = 0 $\Rightarrow$ $\frac{2}{x}=0$ $\Rightarrow$ Por lo tanto, la función no tiene ningún punto de corte con el eje *X*.

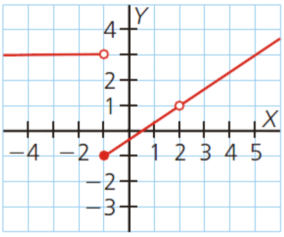
- Con el eje *Y:*

  Como x = 0 $\Rightarrow$ y = f (0) $\Rightarrow$ y = $\frac{2}{0}$. Luego, la función no tiene ningún punto de corte con el eje *Y*.

SOLUCIONES PÁG. 227

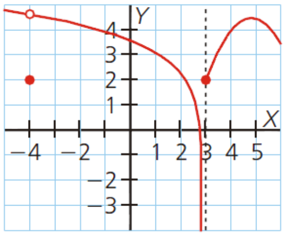
13 Señala los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones e indica el tipo de discontinuidad que presentan dichos puntos:

a.



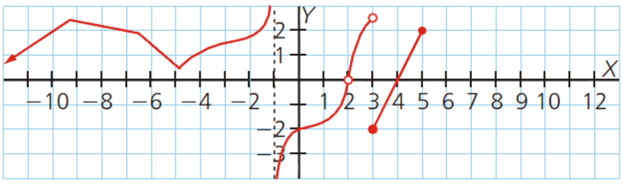
En x = –1, discontinuidad inevitable de tipo salto finito y en x = 2, discontinuidad evitable pues no existe la función.

b.



En x = –4, discontinuidad evitable pues el punto está desplazado y en x = 3, discontinuidad inevitable de tipo salto infinito.

14 Para la función propuesta determina:



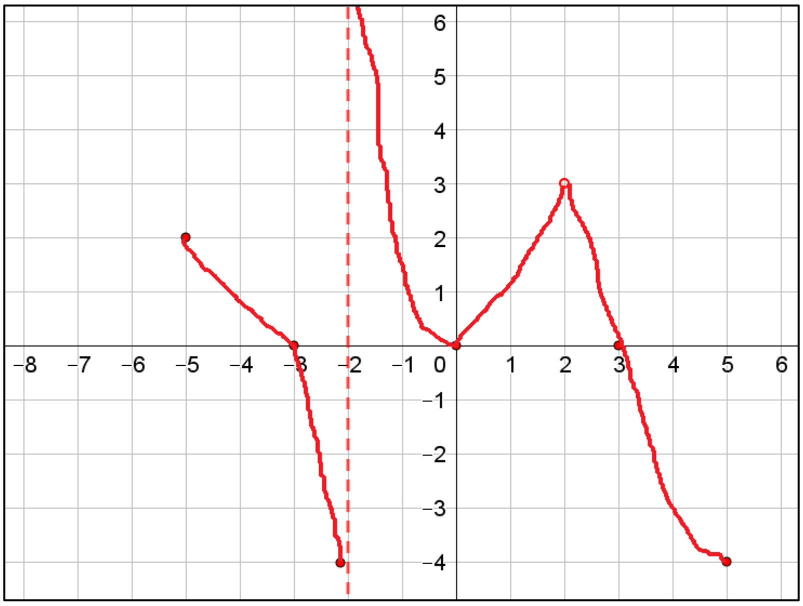
a. El dominio y el recorrido.
D (f) = (–∞ , –1) ∪ (–1 , 2) ∪ (2 , 5]
R (f) = ℝ

b. Las imágenes, si existen, f (–1), f (2) y f (3).
Al fijarse en la gráfica de la función, se observa que no existe f (–1) ni f (2).
Para f (3) = –2

c. Los puntos de corte con los ejes y los de discontinuidad.
Los puntos de corte con los ejes son, con el eje *X:* (4 , 0); con el eje *Y:* (0 , –2).
En x = –1 hay una discontinuidad de tipo salto infinito, en x = 2 no existe la función y en x = 3, de tipo salto finito.

15 Dibuja una función que tenga las siguientes características: Su dominio de definición es D (f) = [–5 , –2) ∪ (–2 , 2) ∪ (2 , 5] y R (f) = [– 4 , + ∞); sus puntos de corte con los ejes son (–3 , 0), (0 , 0) y (3 , 0), y presenta una discontinuidad de tipo salto infinito en $x = -2$, mientras que en $x = 2$ no está definida la función.

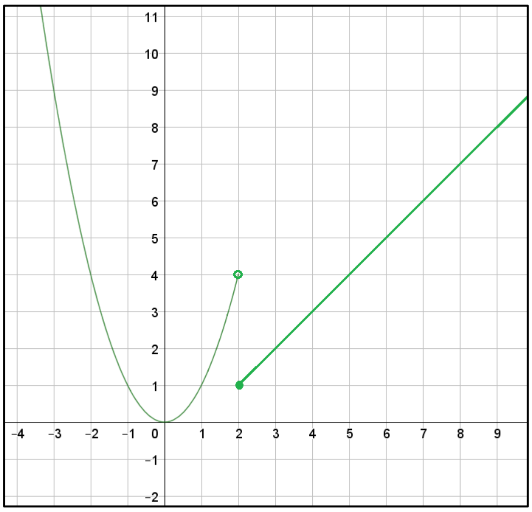
Respuesta abierta. Por ejemplo:



16 Actividad resuelta.

17 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

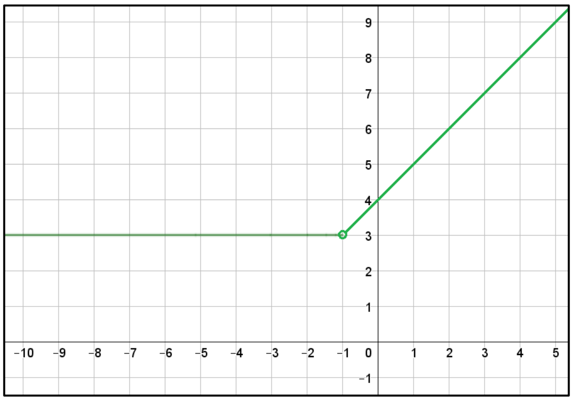


- La representación gráfica de $f_1 = x^2$ es una parábola; así pues, la función es continua en el intervalo $(-\infty , 2)$.

- La representación gráfica de $f_2 = x - 1$ es una recta; así pues, la función es continua en el intervalo $[2\ ,\ +\infty)$.

El único punto donde la función no es continua es el punto de paso de una expresión a otra, es decir, en $x = 2$.
Si se observa la imagen de $x = 2$, por la derecha y por la izquierda se tiene que: $f_1\ (2) = 4$, $f_2\ (2) = 1$. Como ambos valores son distintos, la función es discontinua en $x = 2$. Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b. $$\mathbf{f\ (x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 4 + x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}}$$



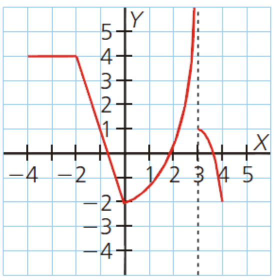
- La representación gráfica de $f_1 = 3$ es una recta; así pues, la función es continua en el intervalo $(-\infty\ ,\ -1)$.
- La representación gráfica de $f_2 = 4 + x$ es también una recta; así pues, la función es continua en el intervalo $(-1\ ,\ +\infty)$.

El único punto donde la función no es continua es el punto de paso de una expresión a otra, es decir, en $x = -1$.
Si se observa la imagen de $x = -1$, por la derecha y por la izquierda se tiene que:
$f_1\ (-1) = 3$, $f_2\ (-1) = 3$. Ambos valores son iguales, pero en $x = -1$, la función no existe. Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

SOLUCIONES PÁG. 229

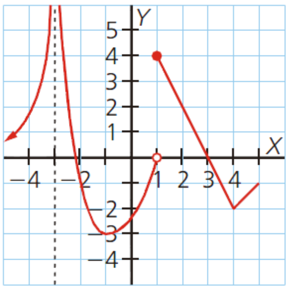
18 Determina el crecimiento de estas funciones e indica cuáles son sus puntos extremos:

a.



Creciente: $(0\ ,\ 3)$
Decreciente: $(-2\ ,\ 0) \cup (3\ ,\ 4)$
Constante: $(-4\ ,\ -2)$
Mínimo relativo $(0\ ,\ -2)$
Máximo relativo no tiene.

b.



Creciente: (–∞ , –3) ∪ (–1 , 1) ∪ (4 , 5)
Decreciente: (–3 , –1) ∪ (1 , 4)
Mínimos relativos: (–1 , –3) y (4 , –2)
Mínimo absoluto: (–1 , –3)
Máximo relativo: (1 , 4)

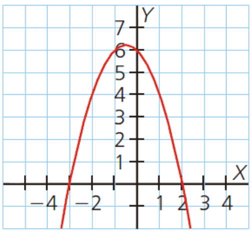
19 Averigua cuál es la relación que existe entre la TVM y la velocidad media de un móvil. Escribe la expresión algebraica de la velocidad media.

La velocidad media es la tasa de variación media para la función velocidad, es decir, el cociente entre la variación del espacio entre la variación del tiempo.

La expresión algebraica es $V_m = \frac{\Delta_e}{\Delta_t} = \frac{e_f - e_i}{t_f - t_i}$, siendo e_i el espacio inicial y e_f el espacio final; y t_i el tiempo inicial y t_f el tiempo final.

20 Halla la TVM de las siguientes funciones en los intervalos [–2 , –1] y [–1 , 1]:

a.



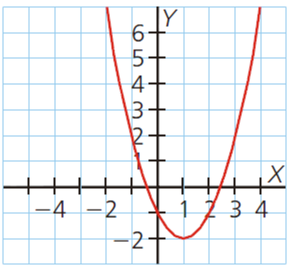
En la gráfica se observa que f (–2) = 4, f (–1) = 6 y f (1) = 4.

Se sustituye en la expresión: $\text{TVM}[a , b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$:

TVM [–2 , –1] = $\frac{f(-1) - f(-2)}{-1+2} = \frac{6-4}{1} = 2$

TVM [–1 , 1] = $\frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{4-6}{2} = -1$

b.



En la gráfica se observa que f (–2) = 7, f (–1) = 2 y f (1) = –2.

Se sustituye en la expresión: $\text{TVM}[a\ ,\ b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

TVM [–2 , –1] = $\frac{f(-1)-f(-2)}{-1+2} = \frac{2-7}{1} = -5$

TVM [–1 , 1] = $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{-2-2}{2} = \ = -2$

21 Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

a. f (x) = 2x + 3, en [1 , 4]

Se calculan las imágenes de x = 1 y x = 4 y se sustituye en la expresión para el cálculo de la TVM.

TVM [1 , 4] = $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{2\cdot 4+3-(2\cdot 1+3)}{3} = \frac{6}{3} = 2$

b. f (x) = x^2 – 5, en [–2 , 3]

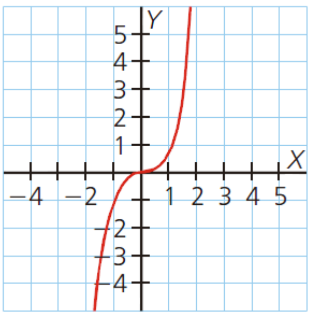
Se calculan las imágenes de x = –2 y x = 3 y se sustituye en la expresión para el cálculo de la TVM.

TVM [–2 , 3] = $\frac{f(3)-f(-2)}{3+2} = \frac{(-3)^2-5-[(-2)^2-5]}{5} = \frac{5}{5} = = 1$

SOLUCIONES PÁG. 231

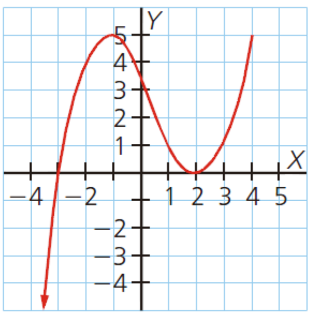
22 Estudia la curvatura de las siguientes funciones y halla, si existen, sus puntos de inflexión:

a.



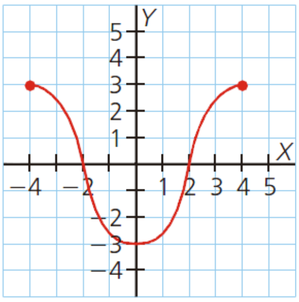
Cóncava: (–∞ , 0); convexa: (0 , +∞); punto de inflexión: (0 , 0)

b.



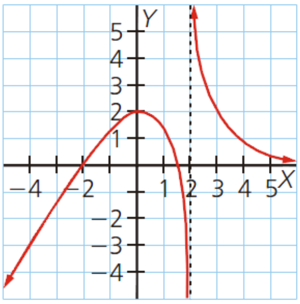
Cóncava: (–∞ , 1); convexa: (1 , 4); punto de inflexión: (1 , 1)

c.



Cóncava: (–4 , –2) ∪ (2 , 4); convexa: (–2 , 2); puntos de inflexión: (–2 , 0) y (2 , 0)

d.



Cóncava: (–∞ , 2); convexa: (2 , +∞); puntos de inflexión: no tiene.

23 Para las funciones de la actividad anterior, halla:

a. El dominio y el recorrido.

a. D (f) = ℝ; R (f) = ℝ
b. D (f) = (–∞ , 4]; R (f) = (–∞ , 5]
c. D (f) = [–4 , 4]; R (f) = [–3 , 3]
d. D (f) = ℝ – {2}; R (f) = ℝ

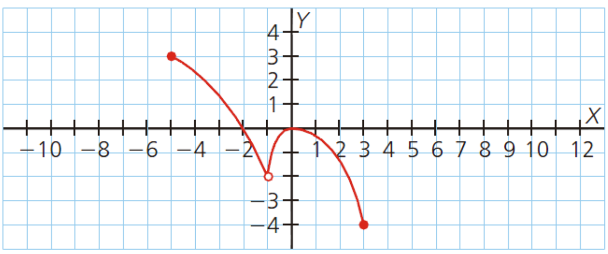
b. El crecimiento y el decrecimiento.

a. Creciente: ℝ
b. Creciente: (–∞ , –1) ∪ (2 , 4); decreciente: (–1 , 2)
c. Creciente: (0 , 4); decreciente: (–4 , 0)
d. Creciente: (–∞ , 0); decreciente: (0 , 2) ∪ (2 , +∞)

c. Los máximos y mínimos relativos y absolutos.

a. No tiene ni máximos ni mínimos.
b. Máximo relativo y absoluto: (–1 , 5) y (4 , 5); mínimo relativo: (2 , 0)
c. Mínimo relativo y absoluto: (0 , –3); máximo absoluto: (–4 , 3) y (4 , 3)
d. Máximo relativo: (0 , 2)

24 Determina para la función propuesta:



a. El dominio y el recorrido.

D (f) = [–5 , –1) ∪ (–1 , 3]; R (f) = [–4 , 3]

b. La continuidad.
Tiene una discontinuad evitable en $x = -1$, pues no existe f (–1).

c. La monotonía y los puntos extremos.
Creciente: (–1 , 0); decreciente: (–5 , –1) ∪ (0 , 3); máximo relativo: (0 , 0); máximo absoluto: (–5 , 3); mínimo absoluto: (3 , –4)

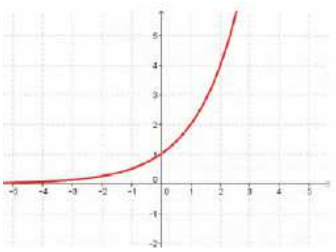
d. La curvatura y los puntos de inflexión.
Cóncava: (–5 , –1) ∪ (–1 , 3); no tiene puntos de inflexión.

e. Los puntos de corte con los ejes.
Con el eje *X:* (–2 , 0) y (0 , 0); con el eje *Y:* (0 , 0)

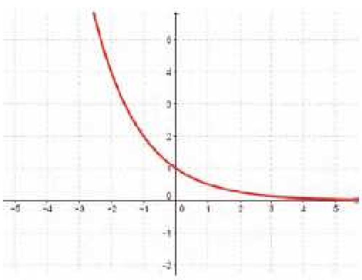
25 Representa la gráfica de una función continua que tenga las siguientes características:
• D (f) = [–5 , 5] y R (f) = [–3 , 4]
• En (–3 , 0) ∪ (0 , 3) es cóncava y en (–5 , –3) ∪ (3 , 5) es convexa.
• Sus puntos de inflexión son (–3 , 0) y (3 , 0).
Respuesta abierta.

26 Dibuja una función continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$, que sea cóncava en $(-3 , +\infty)$ y convexa en $(-\infty, -3)$. ¿Tiene la función un punto de inflexión en x = –3? Justifica tu respuesta.
Respuesta abierta. No tiene un punto de inflexión en $x = -3$, pues en él la función no está definida.

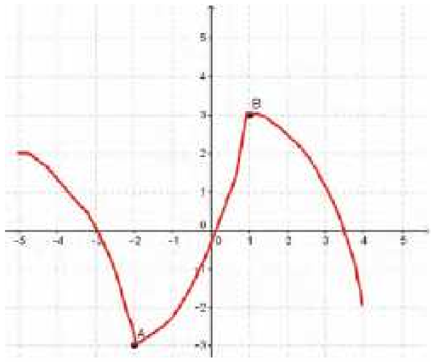
27 ¿Todas las funciones convexas en todo su dominio tienen un mínimo? ¿Y todas las cóncavas, un máximo? Razona tus respuestas.
No todas las funciones convexas tienen un mínimo. Por ejemplo, la siguiente función es convexa en todo su dominio pero no tiene ningún mínimo.



No todas las funciones cóncavas tienen un máximo. Por ejemplo, la siguiente función es cóncava en todo su dominio pero no tiene ningún máximo.

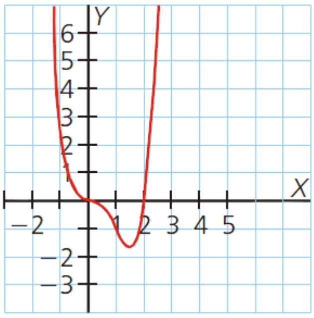


28 ¿Es posible que un punto de una función sea un máximo y a la vez un punto de inflexión? ¿Y si es un mínimo? Justifica ambas respuestas y, en caso afirmativo, dibuja una función con esas características.
Ambas respuestas son afirmativas. Por ejemplo, en la siguiente función, el punto A es un mínimo relativo y absoluto y también es un punto de inflexión. Además, el punto B es un máximo relativo y absoluto y un punto de inflexión.



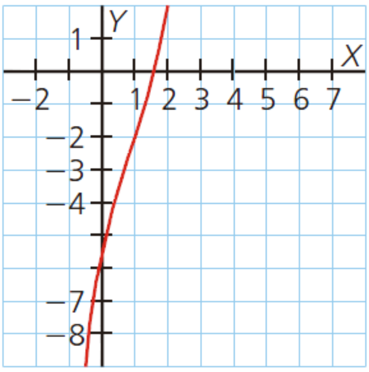
29 **Determina para las funciones propuestas:**

1.



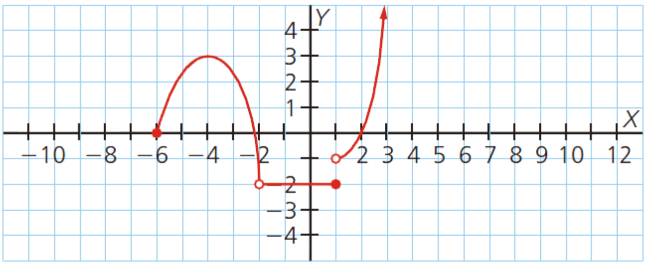
a. **El dominio y el recorrido.**
   D (f) = ℝ; R (f) = [–1,7 ; +∞)
b. **Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.**
   Convexa: (–∞ , 0) ∪ (1 , +∞); cóncava: (0 , 1); puntos de inflexión: (0 , 0) y (1 , –1)
c. **Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos y absolutos.**
   Creciente: (1,5 ; +∞); decreciente: (–∞ ; 1,5); mínimo relativo y absoluto: (1,5 ; 1,7)

2.



a. **El dominio y el recorrido.**
   D (f) = ℝ; R (f) = ℝ
b. **Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.**
   Cóncava: (–∞ , 1); convexa: (1 , +∞); punto de inflexión: (1 , –2)
c. **Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos y absolutos.**
   Creciente en ℝ; no tiene máximos ni mínimos.

30 Observa la siguiente gráfica de una función y determina:



a. El dominio y el recorrido.
D (f) = [–6 , –2) ∪ (–2 , +∞); R (f) = [–2 , +∞)

b. Los puntos de discontinuidad y el tipo de discontinuidad que presentan.
En x = –2, tiene una discontinuidad evitable pues no existe f (–2) y en x = 1, una discontinuidad inevitable de tipo salto finito.

c. La monotonía y la curvatura.
Creciente: (–6 , –4) ∪ (1 , +∞); decreciente: (–4 , –2); constante: (–2 , 1); cóncava: (–6 , –2); convexa: (1 , +∞)

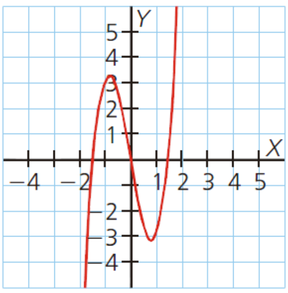
d. Los puntos extremos y los puntos de inflexión.
Máximo relativo: (–4 , 3); mínimos absolutos: todos los puntos de la forma (x , –2) con $x \in$ (–2 , 1]; no tiene puntos de inflexión.

31 En grupos de cuatro alumnos, elaborad una presentación con imágenes o fotografías de objetos presentes en vuestro entorno cotidiano que tengan forma cóncava o convexa.
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 232

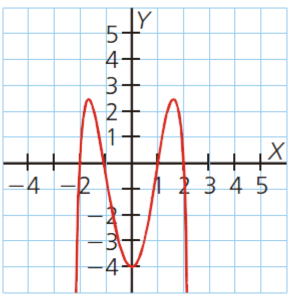
32 Determina si estas funciones son simétricas y, si lo son, indica el tipo de simetría que presentan:

a.



Simétrica impar porque f (**–**x) = **–** f (x).

b.



Simétrica par porque f (**–**x) = f (x).

33 Comprueba si las siguientes funciones son simétricas:

a. $\mathbf{f\ (x) = 2x^5 - 3x^2}$

Se calcula f $(-x)$:

$f(-x) = 2(-x)^5 - 3(-x)^2 = -2x^5 - 3x^2$

Como $f(-x) \neq f(x)$, la función no tiene simetría par.

Se calcula $-f(x)$:

$-f(x) = -(2x^5 - 3x^2) = -2x^5 + 3x^2$

Como $-f(-x) \neq f(-x)$, la función no tiene simetría impar.

b. $\mathbf{f\ (x) = \dfrac{-3x}{x^3 - 5x}}$

Se calcula f $(-x)$:

$$f(-x) = \frac{-3\cdot(-x)}{(-x)^3 - 5\cdot(-x)} = \frac{3x}{-x^3 + 5x}$$

Como $f(-x) \neq f(x)$, la función no tiene simetría par.

Se calcula $-f(x)$:

$$-f(x) = -\frac{-3x}{x^3 - 5x} = \frac{-3x}{-x^3 + 5x}$$

Como $-f(-x) = f(-x)$, la función tiene simetría impar.

c. $\mathbf{f\ (x) = 2^x}$

Se calcula f $(-x)$:

$$f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$$

Como $f(-x) \neq f(x)$, la función no tiene simetría par.

Se calcula $-f(x)$:

$-f(x) = -2^x$

Como $-f(-x) \neq f(-x)$, la función no tiene simetría impar.

d. $\mathbf{f\ (x) = |x|}$

Se calcula f $(-x)$:

$f(-x) = |-x| = x$

Como $f(-x) = f(x)$, la función tiene simetría par.

34 Representa una función, f (*x*), continua y simétrica impar con D (f) = $\mathbb{R}$ que sea creciente en $(-\infty\ ,\ -4)$ U $(4\ ,\ +\infty)$, decreciente en $(-\ 4, -1)$ U $(1\ ,\ 4)$ y constante en $(-1\ ,\ 1)$.

Respuesta abierta.

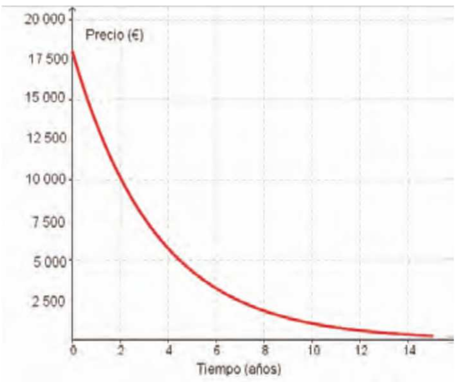
SOLUCIONES PÁG. 233

35 Paula se ha comprado por 18 000 € un coche cuyo precio se devalúa anualmente un 25 %.

a. Construye una tabla de valores que recoja el precio del coche en los próximos años, representa la gráfica de la función y determina su expresión algebraica.

Sea x = número de años, y = precio del coche

x	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	18000	13500	10125	7593,75	5695,31	4271,48



$y = f(x) = 18\,000 \cdot (0{,}75)^x$

b. ¿Cuál es la tendencia a medida que pasan los años?

Al transcurrir los años el precio del coche tiende a 0 €.

36 Representa una función con D (f) = [–5 , +∞) y R (f) = [–3 , 5], que sea creciente en (–5 , 0) y decreciente en (0 , +∞), y que tienda a 1 cuando la variable *x* tiende a +∞.

Respuesta abierta.

37 Dibuja una función continua cuyo recorrido sea [–4 , 4] y que sea periódica de periodo 5.

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 235

38 Dadas las funciones f (x) = $2x - 3$, g (x) = $-x^2 + 5x$ y h (x) = $\frac{x+2}{x-3}$, realiza estas operaciones:

a. $(f + g)(x) = (2x - 3) + (-x^2 + 5x) = -x^2 + 7x - 3$

b. $(g - f)(x) = (-x^2 + 5x) - (2x - 3) = -x^2 + 3x + 3$

c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x - 3}{-x^2 + 5x}$

d. $(f \cdot g)(x) = (2x - 3) \cdot (-x^2 + 5x) = -2x^3 + 13x^2 - 15x$

e. $(g + h)(x) = -x^2 + 5x + \frac{x+2}{x-3} = \frac{(x-3)\cdot(-x^2+5x)+(x+2)}{x-3} =$

$$= \frac{-x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 15x + x + 2}{x - 3} = \frac{-x^3 + 8x^2 - 14x + 2}{x - 3}$$

f. **(h – g) (*x*)** = $\dfrac{x+2}{x-3}$ – ($-x^2$ + 5x) = $\dfrac{(x+2)-\left[\left(-x^2+5x\right)\cdot(x-3)\right]}{x-3}$ =

= $\dfrac{(x+2)-\left(-x^3+3x^2+5x^2-15x\right)}{x-3}$ = $\dfrac{x+2+x^3-3x^2-5x^2+15x}{x-3}$ =

= $\dfrac{x^3-8x^2+16x+2}{x-3}$

g. **(g · h) (*x*)** = $-x^2$ + 5x · $\dfrac{x+2}{x-3}$ = $\dfrac{\left(-x^2+5x\right)\cdot x+2}{x-3}$ = $\dfrac{-x^3+5x^2-2x^2+10x}{x-3}$ =

= $\dfrac{-x^3+3x^2+10x}{x-3}$

h. **4 · f (*x*)** = 4 · (2x – 3) = 8x – 12

i. $\left(\dfrac{\mathbf{h}}{\mathbf{f}}\right)$**(*x*)** = $\dfrac{x+2}{x-3}$: 2x – 3 = $\dfrac{x+2}{2x-3(x-3)}$ **=** $\dfrac{x+2}{2x^2-6x-3x+9}$ **=** $\dfrac{x+2}{2x^2-9x+9}$

39 **Las operaciones de suma, resta y multiplicación de funciones ¿cumplen la propiedad conmutativa? ¿Y la división? ¿Y la composición de funciones?**

La suma y la multiplicación de funciones sí cumplen la propiedad conmutativa. La división y la composición de funciones no cumplen la propiedad conmutativa, salvo la composición de una función con su inversa.

40 **Actividad resuelta.**

41 **Halla, para las funciones de la actividad 38:**

a. **(g ∘ f) (*x*)** = g [f (x)] = $-(2x-3)^2$ + 5 · (2x – 3) = $-(4x^2$ + 9 – 2 · 2x · 3) + 10x –15 =
= $-4x^2$ – 9 + 12x + 10x –15 **=** $-4x^2$ + 22x – 24

b. **(f ∘ g) (*x*)** = $-x^2$ + 10x – 3

c. **(h ∘ f) (2)** = $\dfrac{2x-3+2}{2x-3-3}$ = $-\dfrac{3}{2}$

d. **(f ∘ h) (*x*)** = 2 · $\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$ – 3 = $\dfrac{2x+4}{x-3}$ – 3 = $\dfrac{2x+4-3x+9}{x-3}$ = $\dfrac{-x+13}{x-3}$

e. **(h ∘ g) (*x*)** = $\dfrac{-x^2+5x+2}{-x^2+5x-3}$

f. **(g ∘ h) (–1)** = $-\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^2+5\cdot\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)=-\dfrac{21}{16}$

42 **Halla la función inversa de las siguientes funciones:**

a. **f (*x*) = –4*x* + 2**

f (x) = –4x + 2 ⇒ y = –4x + 2 ⇒ x = $\dfrac{y-2}{-4}$ ⇒ x = $\dfrac{-y+2}{4}$ ⇒ $f^{-1}(x)$ = $\dfrac{-x+2}{4}$

b. **g (*x*) =** $\sqrt{\mathbf{2x-7}}$

g (x) = $\sqrt{2x-7}$ ⇒ y = $\sqrt{2x-7}$ ⇒ y^2 = 2x – 7 ⇒ x = $\dfrac{y^2+7}{2}$ ⇒ $g^{-1}(x)$ = $\dfrac{x^2+7}{2}$

c. $\mathbf{h\ (\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+4}}$

h $(x) = \dfrac{x}{x+4} \Rightarrow y = \dfrac{x}{x+4} \Rightarrow yx + 4y = x \Rightarrow 4y = x - yx \Rightarrow 4y = x\,(1 - y) \Rightarrow$

$x = \dfrac{4y}{1-y} \Rightarrow h^{-1}\,(x) = \dfrac{4x}{1-x}$

d. $\mathbf{i\ (\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{4-\boldsymbol{x}}}$

i $(x) = \sqrt[3]{4-x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{4-x} \Rightarrow y^3 = 4 - x \Rightarrow x = 4 - y^3 \Rightarrow i^{-1}\,(x) = 4 - x^3$

e. $\mathbf{j\ (\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\boldsymbol{x}}{5} + 3}$

j $(x) = -\dfrac{x}{5} + 3 \Rightarrow y = -\dfrac{x}{5} + 3 \Rightarrow y - 3 = -\dfrac{x}{5} \Rightarrow 5y - 15 = -x \Rightarrow x = 15 - 5y \Rightarrow$

$j^{-1}\,(x) = 15 - 5y$

f. $\mathbf{k\ (\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^5 + 1}$

k $(x) = 2x^5 + 1 \Rightarrow y = 2x^5 + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x^5 \Rightarrow x = \sqrt[5]{\dfrac{y-1}{2}} \Rightarrow j^{-1}\,(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x-1}{2}}$

43 En el caso de la función f (*x*) = $\mathbf{\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}-1}}$ **:**

a. Averigua cuál es su función inversa.

$y = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow y\,(x - 1) = x \Rightarrow \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1}{y} \Rightarrow f^{-1}\,(x) = \dfrac{x}{x-1}$

b. ¿Con qué función coincide su inversa?

Coincide con la función f (*x*).

c. Comprueba que se cumple que $\mathbf{(f^{-1} \circ f)\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}}$ **y** $\mathbf{(f \circ f^{-1})\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}}$

$(f^{-1} \circ f)\ (x) = (f^{-1} \circ f)\ (x) = \dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}} = \dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$

Se cumplen ambas composiciones.

44 Comprueba, en cada caso, si los siguientes pares de funciones son inversas:

a. $\mathbf{f\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3 + 1}$ **y** $\mathbf{g\ (\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}-1}}$

Sí son inversas: $y = x^3 + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow f^{-1}\,(x) = \sqrt[3]{x-1}$

b. $\mathbf{f\ (\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+2}}$ **y** $\mathbf{g\ (\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{2-\boldsymbol{x}}}$

No son inversas. $y = \dfrac{x}{x+2} \Rightarrow yx + 2y = x \Rightarrow \dfrac{2y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}\,(x) = \dfrac{2x}{1-x}$

c. $\mathbf{f\ (\boldsymbol{x}) = -4\boldsymbol{x} - 1}$ **y** $\mathbf{g\ (\boldsymbol{x}) = \dfrac{4\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+1}}$

No son inversas. $y = -4x - 1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{-4} \Rightarrow f^{-1}\,(x) = \dfrac{x+1}{-4}$

d. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ **y** $g(x) = \dfrac{2\cdot(x+1)}{x-1}$

No son inversas. $y = \dfrac{x-2}{x+2} \Rightarrow y(x+2) = x-2 \Rightarrow yx + 2y = x - 2 \Rightarrow$

$2y - 2 = x - yx \Rightarrow 2y - 2 = x(1-y) \Rightarrow \dfrac{2y-2}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2x-2}{1-x}$

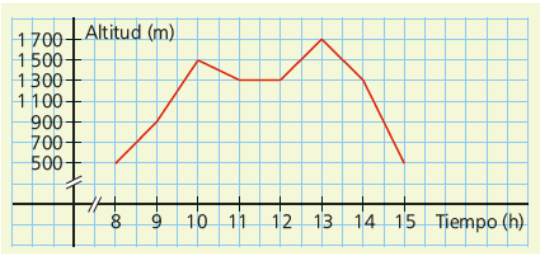
45 ¿Existe para la función f (*x*) = x^2 – 1 su inversa para cualquier valor de *x* del dominio de f (*x*)? Justifica tu respuesta.

Solo existe función inversa para el dominio de valores comprendido en el intervalo [–1 , +∞).

$f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow y = x^2 - 1 \rightarrow x = \sqrt{y+1}$

SOLUCIONES PÁG. 237

46 La siguiente gráfica muestra la altura a la que se encuentra un alpinista a lo largo de una mañana de escalada en la montaña:



a. Determina el dominio y el recorrido de esta función.
D (f) = [8 , 15]; R (f) = [500 , 1 700]

b. ¿En qué intervalos de tiempo el alpinista asciende en la montaña? ¿Y en qué intervalos desciende?
Asciende en (8 , 10) ∪ (12 , 13); desciende en (10 , 11) ∪ (13 , 15)

c. ¿Cuáles son los máximos relativos y absolutos de la función?
Máximos relativos: (10 , 1 500) y (13 , 1 700); máximo absoluto: (13 , 1 700)

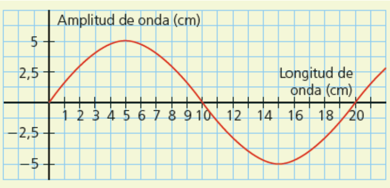
d. El alpinista hizo una parada para descansar. ¿Entre qué horas se produjo dicha parada?
Entre las 11:00 h y las 12:00 h.

e. ¿A qué altitud se encontraba a las 10 h de la mañana?
A 1 500 m de altitud.

f. ¿En qué momento de la mañana estuvo a 900 m de altitud?
A las 9:00 h y a las 14:30 h.

g. Describe brevemente el recorrido del alpinista durante la mañana según la altitud a la que estaba.
El alpinista comienza a las 08:00 h su ascenso partiendo de 500 m de altitud, para ascender a 1 500 m en dos horas. Después, desciende en una hora a 1 300 m y hace un descanso de una hora, para seguir ascendiendo hasta alcanzar la altura máxima de 1 700 m a las 13:00 h. A partir de esa hora, comienza a descender hasta llegar al punto de partida a las 15:00 h.

47 La siguiente gráfica muestra la amplitud de una onda de sonido a lo largo del tiempo:



a. Halla el recorrido de la función.
R (f) = [–5 , 5]

b. ¿En qué puntos alcanza la función el máximo y el mínimo absolutos?
Los máximos absolutos se alcanzan en los puntos (5 , 5), (25 , 5), (45 , 5), ..., (20k + 5 , 5) con k $\in$ {0, 1, 2, …}; los mínimos absolutos se alcanzan en los puntos (15 , –5), (35 , –5), (55 , –5), ..., (20k + 15 , –5) con k $\in$ {0, 1, 2, …}.

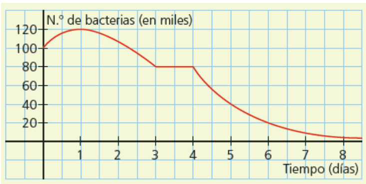
c. ¿En qué intervalos es la función creciente? ¿Y decreciente?
Es creciente en (0 , 5) $\cup$ (15 , 25) $\cup$ (35 , 45) ...; decreciente en (5 , 15) $\cup$ (25 , 35) $\cup$ (45 , 55) ...

d. ¿Se trata de una función periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es el periodo?
Sí, de periodo 20 cm.

e. ¿Es una función simétrica?
No es simétrica.

f. Halla la amplitud de onda cuando la longitud de onda es de 30 cm, 45 cm y 60 cm. Justifica tu respuesta.
$f(30) = f(10 + 20) = f(10) = 0$
$f(45) = f(5 + 2 \cdot 20) = f(5) = 5$
$f(60) = f(0 + 3 \cdot 20) = f(0) = 0$

48 Un grupo de investigadores está trabajando en un nuevo antibiótico. La siguiente gráfica muestra la evolución a lo largo del tiempo del número de bacterias expuestas a los efectos del fármaco:



a. Indica el recorrido de la función.
R (f) = (0 , 120 000]

b. ¿Cuál era el número inicial de bacterias sobre el que se estaba trabajando?
El número inicial era de 100 000 bacterias.

c. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
Creciente: (0 , 1); decreciente: (1 , 3) $\cup$ (4 , +∞)

d. ¿Hubo algún momento en el que el número de bacterias se mantuviese constante? En caso afirmativo, ¿cuántas bacterias había?
Sí, en el intervalo de tiempo (3 , 4). Había 80 000 bacterias.

e. ¿Cuál fue el mayor número de bacterias registrado?
El mayor número de bacterias era de 120 000.

f. Determina la curvatura de la función y halla, si existen, los puntos de inflexión.
Cóncava: (0 , 3); convexa: (4 , +∞)

g. **Indica cuál es la tendencia de la función a medida que pasan los días.**
La función tiende a cero a medida que pasan los días.

49 La siguiente gráfica muestra el precio de cada acción en bolsa de una empresa de telecomunicaciones durante su primer semestre de cotización:

a. **Halla el dominio y el recorrido de la función.**
D (f) = [0 , 6]; R (f) = [10 , 12]

b. **¿A qué precio salió a bolsa cada acción?**
El precio de salida a bolsa fue de 11 €.

c. **Si hubiéramos invertido en esta empresa nada más salir a bolsa, ¿habríamos hecho una buena inversión? Justifica la respuesta.**
Sí, pues habríamos comprado cada acción a 11 € y tras los seis primeros meses habríamos ganado 0,50 € por cada acción.

d. **¿En qué mes fue el precio de la acción máximo y en cuál mínimo? Indica el precio en cada uno de los dos casos.**
El precio fue máximo a los 2 meses de salir a bolsa con un valor de 12 € por acción, y mínimo a los 4 meses, con un valor de 10 € cada acción.

SOLUCIONES PÁG. 239

1 ¿Cuántas imágenes, como máximo, puede tener cualquier valor de la variable independiente en una función?
Como máximo solo puede tener una.

2 ¿Cuántos puntos de corte con cada uno de los dos ejes de coordenadas puede tener una función?
Con el eje *X* puede tener infinitos puntos de corte, con el eje *Y* solo puede tener uno.

3 Indica qué tienen en común todos los puntos de corte de una función con el eje de abscisas.
La variable dependiente de todos ellos es cero.

4 Explica cuándo es una función continua en un punto de su dominio.
Una función es continua en un punto $x = a$ si al aproximarnos al valor $x = a$ por su derecha y por su izquierda, las imágenes se acercan a f (a).

5 Una función discontinua en $x = a$ ¿puede tener en ese valor una discontinuidad de tipo salto finito y a la vez no estar definida en él? Justifica tu respuesta
Sí puede. Respuesta abierta.

6 **¿Puede una función tener extremos relativos y al mismo tiempo carecer de extremos absolutos? Justifica tu respuesta.**
Sí, pues los extremos relativos lo son en un entorno de x y no en toda la función, y la función puede no alcanzar su valor mayor o menor, porque estos tiendan a $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente.

7 **¿Es posible que una función continua tenga un mínimo relativo en el punto (1 , 5) y un máximo relativo en (–1 , –5)?**
Sí es posible.

8 **Define punto de inflexión. ¿Tienen todas las funciones continuas puntos de inflexión?**
Una función tiene un punto de inflexión en x = a si es continua en a y en ese punto de inflexión cambia de curvatura, es decir, pasa de ser cóncava a convexa o viceversa. No todas las funciones continuas tienen puntos de inflexión.

9 **¿Son todas las funciones simétricas pares o impares?**
No, una función puede no ser simétrica, es decir, no se simétrica par ni impar.

10 **En una función periódica ¿cómo se llama al intervalo de la variable independiente para el que se repite la gráfica de la función?**
Se llama periodo.

11 **Dadas las expresiones algebraicas de dos funciones, f y g, ¿cómo se puede saber si son inversas? ¿Y a partir de sus representaciones gráficas?**
Se puede saber si son inversas a partir de sus expresiones algebraicas, si al hacer $f^{-1} \circ f$ y $f \circ f^{-1}$, se obtiene la función identidad.
A partir de sus representaciones gráficas, si las funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$.

12 **Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…**
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 240 - REPASO FINAL

FUNCIONES

1 **Halla las imágenes, si existen, de los valores $x = -3$, $x = 0$ y $x = \frac{1}{5}$ para las siguientes funciones:**

a. $f(x) = 5x - 3$

$f(-3) = -18$

$f(0) = -3$

$f\left(\frac{1}{5}\right) = -2$

b. $\mathbf{f\,(x) = \dfrac{5}{-2x-6}}$

No existe f (–3)

$f\,(0) = -\dfrac{5}{6}$

$f\left(\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{25}{32}$

c. $\mathbf{f\,(x) = 5x^2 + x - 2}$

$f\,(-3) = 40$

$f\,(0) = -2$

$f\left(\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{8}{5}$

d. $\mathbf{f\,(x) = \sqrt{4-2x}}$

$(-3) = \sqrt{10}$

$f\,(0) = 2$

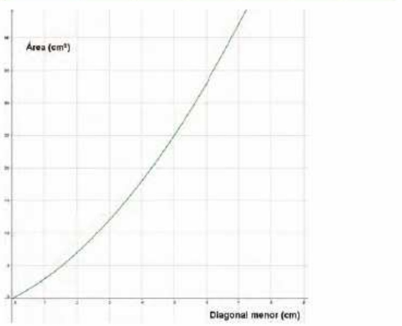
$f\left(\dfrac{1}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{18}{5}}$

2 **Las diagonales de un rombo difieren en 5 cm. Halla la expresión algebraica de la función que relaciona la diagonal menor y el área del rombo. A partir de ella, haz una tabla de valores y representa gráficamente la función.**

Sea x = diagonal menor; $x + 5$ = diagonal mayor

$f\,(x) = \dfrac{x \cdot (x+5)}{2}$

x	0	1	2	3	4	5
$y = f\,(x)$	0	3	7	12	18	25



3 **Visita esta página de Internet para repasar las formas de presentar una función:** http://conteni2.educarex.es/mats/12068/contenido

Respuesta abierta

DOMINIO Y RECORRIDO

4 **Halla el dominio y el recorrido de estas funciones:**

a. $\mathbf{f\,(x) = 2x}$

D (f) = $\mathbb{R}$; R (f) = $\mathbb{R}$

b. $\mathbf{f\,(x) = 3x^2}$

D (f) = $\mathbb{R}$; R (f) = $[0\,, +\infty)$

c. $\mathbf{f\,(x) = |x|}$

D (f) = $\mathbb{R}$; R (f) = $[0\,, +\infty)$

d. $\mathbf{f\ (\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\boldsymbol{x}}}$

D (f) = $\mathbb{R} - \{0\}$; R (f) = $\mathbb{R} - \{0\}$

5 Determina el dominio de las siguientes funciones:

a. $\mathbf{f\ (\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^3 - 4\boldsymbol{x}^2 - 6\boldsymbol{x} + 8}$

La expresión algebraica de la función es un polinomio. Por lo tanto, es dominio son todos los números reales. D (f) = $\mathbb{R}$

b. $\mathbf{f\ (\boldsymbol{x}) = \dfrac{-2\boldsymbol{x}}{5\boldsymbol{x} - 4}}$

Como la expresión algebraica de la función, $f(x) = \dfrac{2x}{5x-4}$, tiene x en el denominador, la función no está definida cuando el denominador se anula. Para determinar los valores de x en los que se anula el denominador, se iguala a cero el denominador y se resuelve la ecuación:

$5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4}{5}$

c. $\mathbf{f\ (\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - 1}}$

Como la expresión algebraica de la función, f (x) = $\sqrt{x^2-1}$, tiene x bajo un radical de índice par, la función solo está definida si el radicando es positivo o nulo. Para determinar los valores de x que hacen que el radicando sea positivo o nulo, se resuelve la ecuación:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Se forman intervalos con esos números y se coge un número de cada intervalo para sustituirlo en la función:

$(-\infty , -1)$ $(-1 , 1)$ $(1 , +\infty)$

f (–2) = $\sqrt{(-2)^2 - 1} = \sqrt{3} > 0$

f (0) = $\sqrt{0^2 - 1} = \sqrt{-1} < 0$

f (2) = $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3} > 0$

Por tanto, el dominio de la función es el conjunto de los números reales que se encuentran en el intervalo $(-\infty , -1] \cup [1 , +\infty)$. D (f) = $(-\infty , -1] \cup [1 , +\infty)$

d. $\mathbf{f\ (\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}+1}{3\boldsymbol{x}^2 - 6}}$

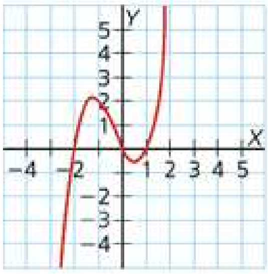
Como la expresión algebraica de la función, f (x) = $\dfrac{x+1}{3x^2-6}$, tiene x en el denominador, la función no está definida cuando el denominador se anula. Para determinar los valores de x en los que se anula el denominador, se iguala a cero el denominador y se resuelve la ecuación:

$3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. D (f) = $\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}$

PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

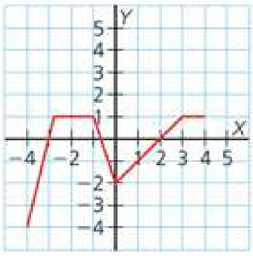
6 Indica los puntos de corte de estas funciones con los ejes de coordenadas:

a.



Con el eje *X:* (–2 , 0), (0 , 0) y (1 , 0); con el eje *Y:* (0 , 0)

b.



Con el eje *X:* (–3 , 0), $\left(\frac{-2}{3},0\right)$ y (2 , 0); con el eje *Y:* (0 , –2)

7 Halla los puntos de corte con los ejes de estas funciones:

a. f (*x*) = $3x^2 + 2x - 5$

- Con el eje *X:*
  Como $y = f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 \Rightarrow$
  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$
  Por lo tanto, la función tiene dos puntos de corte con el eje *X:* $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ y (1 , 0).
- Con el eje *Y:*
  Como $x = 0 \Rightarrow y = f(0) \Rightarrow y = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 = -5$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es (0 , –5).

b. f (*x*) = $\dfrac{1}{-2x+8}$

- Con el eje *X:*
  Como $y = f(x) = 0 \Rightarrow$ La función no tiene ningún punto de corte con el eje *X.*
- Con el eje *Y:*
  Como $x = 0 \Rightarrow y = f(0) \Rightarrow y = \dfrac{1}{-2x+8} = \dfrac{1}{-2 \cdot 0 + 8} = \dfrac{1}{8}$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es $\left(0,\frac{1}{8}\right)$.

c. $\mathbf{f\,(\mathit{x}) = \sqrt{\mathit{x}^2 + 2\mathit{x} + 1}}$

- Con el eje *X:*

  Como $y = f\,(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 0$

  $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$. Por lo tanto, la función tiene un punto de corte con el eje *X:* (–1 , 0).

- Con el eje *Y:*

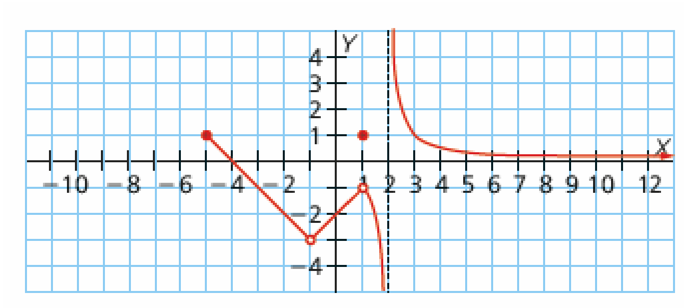
  Como $x = 0 \Rightarrow y = f\,(0) \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{0^2 + 2\cdot 0 + 1} = 1$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es (0 , 1).

d. $\mathbf{f\,(\mathit{x}) = (\mathit{x} - 4)^2}$

- Con el eje *X:*
  Como $y = f\,(x) = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$. Por lo tanto, la función tiene un punto de corte con el eje *X:* (4 , 0).
- Con el eje *Y:*
  Como $x = 0 \Rightarrow y = f\,(0) \Rightarrow y = (0 - 4)^2 = 16$. Luego, el punto de corte con el eje *Y* es (0 , 16).

CONTINUIDAD

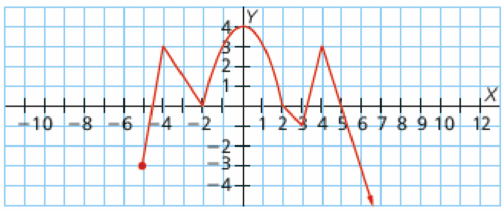
8 Determina, para la función propuesta, el dominio, el recorrido, los puntos de corte con los ejes, los puntos de discontinuidad y los tipos de discontinuidad.



D (f) = [–5 , –1) ∪ (–1 , 2) ∪ (2 , +∞); R (f) = ℝ
Puntos de corte con el eje *X:* (–4 , 0), y con el eje *Y:* (0 , –2)
La función presenta una discontinua evitable en $x = -1$, en cuyo valor no existe la función, en x = 1 presenta una discontinuidad evitable de tipo punto desplazado y en $x = 2$, inevitable de tipo salto infinito.

MONOTONÍA Y PUNTOS EXTREMOS

9 Indica, para la función siguiente, el dominio, el recorrido, la monotonía y los puntos extremos.



D (f) = [–5 , +∞); R (f) = (–∞ , 4]
Es creciente en (–5 , –4) ∪ (–2 , 0) ∪ (3 , 4) y decreciente en (–4 , –2) ∪ (0 , 3) ∪ (4 , +∞)
Tiene máximos relativos en: (–4 , 3), (0 , 4) y (4 , 3), máximo absoluto en (0 , 4), mínimos relativos en (–2 , 0) y (3 , –1) y mínimo absoluto no tiene.

10 Halla la TVM de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

a. f (*x*) = $-x^2 + 3x$ en [–2 , 5]

Se calculan las imágenes de $x = -2$ y $x = 5$ y se sustituye en la expresión para el cálculo de la TVM.

$$\text{TVM } [-2, 5] = \frac{f(5)-f(-2)}{5-(-2)} = \frac{-5^2+3\cdot 5-[-(-2)^2+3\cdot(-2)]}{7} = \frac{-10+10}{7} = 0$$

b. f (*x*) = 3^{x+1} en [0 , 2]

Se calculan las imágenes de $x = 0$ y $x = 2$ y se sustituye en la expresión para el cálculo de la TVM.

$$\text{TVM } [0, 2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{3^{2+1}-3^{0+1}}{2} = \frac{27-3}{2} = 12$$

c. f (*x*) = $\sqrt{x-4}$ en [5 , 13]

Se calculan las imágenes de $x = 5$ y $x = 13$ y se sustituye en la expresión para el cálculo de la TVM.

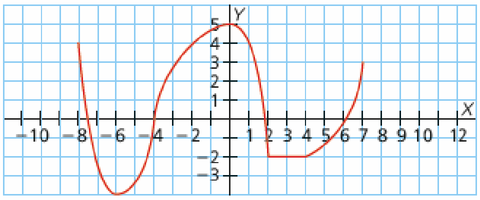
$$\text{TVM } [0, 2] = \frac{f(13)-f(5)}{13-5} = \frac{\sqrt{13-4}-\sqrt{5-4}}{8} = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$$

11 En una función cuya TVM en el intervalo [a , b] es negativa, ¿qué es mayor: f (a) o f (b)?

Es mayor f (a).

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

12 Halla para la función propuesta, la monotonía, los puntos extremos, la curvatura y los puntos de inflexión.



La función es creciente en (–6 , 0) ∪ (4 , 7), decreciente en (–8 , –6) ∪ (0 , 2) y constante en (2 , 4). Tiene un máximo relativo y absoluto en (0 , 5) y un mínimo relativo y absoluto en (–6 , –4). Es cóncava en (–4 , 2) y convexa en (–8 , –4) ∪ (4 , 7) y presenta un punto de inflexión en (–4 , 0).

SOLUCIONES PÁG. 241

SIMETRÍA

13 Estudia si las siguientes funciones son simétricas:

a. $f(x) = -x^3 - 5x$

Se calcula $f(-x)$:

$f(-x) = -(-x)^3 - 5 \cdot (-x) = x^3 + 5x$

Como $f(-x) \neq f(x)$, la función no tiene simetría par.

Se calcula $-f(x)$:

$-f(x) = -(-x^3 - 5x) = x^3 + 5x$

Como $-f(-x) = f(-x)$, la función tiene simetría impar.

b. $f(x) = 2^{x^2}$

Se calcula $f(-x)$:

$f(-x) = 2^{(-x)^2} = 2^{x^2}$

Como $f(-x) = f(x)$, la función tiene simetría par.

c. $f(x) = 5x^3 - 3x^2$

Se calcula $f(-x)$:

$f(-x) = 5 \cdot (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2 = -5x^3 - 3x^2$

Como $f(-x) \neq f(x)$, la función no tiene simetría par.

Se calcula $-f(x)$:

$-f(x) = -(5x^3 - 3x^2) = -5x^3 + 3x^2$

Como $-f(-x) = f(-x)$, la función tiene simetría impar.

d. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Se calcula $f(-x)$:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Como $f(-x) = f(x)$, la función tiene simetría par.

14 Dibuja una función continua, f (x), con D (f) = $\mathbb{R}$, simétrica impar y con un mínimo absoluto en (3 , –4). ¿Tiene máximo absoluto? En caso afirmativo, ¿qué punto es?
Respuesta abierta.

TENDENCIA Y PERIODICIDAD

15 Representa, en cada caso, una función que:
a. Sea periódica, de periodo 5.
Respuesta abierta.
b. Tienda a 3 y a –2 al tender x a +∞ y a –∞, respectivamente.
Respuesta abierta.

OPERACIONES CON FUNCIONES

16 Dadas las funciones f (x) = –4x + 3, g (x) = 2x^2 + 5x y h (x) = $\frac{x-2}{1-5x}$, calcula:

a. $(f + h)(x) = (-4x + 3) + \dfrac{x-2}{1-5x} = \dfrac{x-2+(1-5x)\cdot(-4x+3)}{1-5x} = \dfrac{x-2-4x+3+20x^2-15x}{1-5x} = \dfrac{-18x+1+20x^2}{1-5x}$

b. $(3g - 2f)(x) = 3(2x^2 + 5x) - 2(-4x + 3) = 6x^2 + 15x + 8x - 6 = 6x^2 + 23x - 6$

c. $(f^{-1})(x) \Rightarrow y = -4x + 3 \Rightarrow x = \dfrac{y-3}{-4} \Rightarrow f^{-1} = \dfrac{x-3}{-4}$

d. $(g \cdot h)(x) = (2x^2 + 5x) \cdot \dfrac{x-2}{1-5x} = \dfrac{2x^3-4x^2+5x^2-10x}{1-5x} = \dfrac{2x^3+x^2-10x}{1-5x}$

e. $(g \circ f)(x) = 2 \cdot (-4x + 3)^2 + 5 \cdot (-4x + 3) = 2(16x^2 + 9 - 24x) - 20x + 15 = 32x^2 + 18 - 48x - 20x + 15 = 32x^2 - 68x + 33$

f. $(h \circ f)(x) = \dfrac{(-4x+3)-2}{1-5(-4x+3)} = \dfrac{-4x+1}{20x-14}$

g. $(h^{-1})(x) \Rightarrow y = \dfrac{x-2}{1-5x} \Rightarrow y(1-5x) = x-2 \Rightarrow y - 5xy + 2 = x \Rightarrow x = \dfrac{y+2}{1+5y} \Rightarrow$

$\Rightarrow h^{-1} = \dfrac{x+2}{1+5x}$

h. $(f \cdot g)(x) = (-4x + 3) \cdot (2x^2 + 5x) = -8x^3 - 20x^2 + 6x^2 + 15x = -8x^3 - 14x^2 + 15x$

i. $\left(\dfrac{-2g}{f}\right)(x) = \dfrac{-2(2x^2+5x)}{-4x+3} = \dfrac{-4x^2-10x}{-4x+3}$

j. $(f + 4 \cdot g)(x) = -4x + 3 + 4 \cdot (2x^2 + 5x) = -4x + 3 + 8x^2 + 20x = 8x^2 + 16x + 3$

k. $(f \circ h)(x) = -4 \cdot \left(\dfrac{x-2}{1-5x}\right) + 3 = \dfrac{-4x+8+3-15x}{1-5x} = \dfrac{-19x+11}{1-5x}$

l. $\left(\dfrac{h}{f}\right)(x) = \dfrac{x-2}{1-5x} : -4x + 3 = \dfrac{x-2}{-4x+3+20x^2-15x} = \dfrac{x-2}{20x^2-19x+3}$

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE FUNCIONES

17 Un delfín salta hasta que alcanza cierta altura y vuelve a zambullirse en el agua. La función que relaciona la altura alcanzada en cada salto, en metros, con el tiempo, en segundos, es f (x) = $-2x^2 + 8x$.

a. Haz una tabla de valores para el primer salto y representa la función.

x	0	1	2	3	4
y = f (x)	0	6	8	6	0

b. Si el delfín salta una y otra vez, ¿es la función periódica? En caso afirmativo, indica cuál es el periodo.

Sí, de periodo 4.

c. ¿Cuál es la altura alcanzada por el delfín a los 21 s? ¿Y a los 28 s?

f (21) = f (1 + 5 · 4) = f (1) = 6 m

f (28) = f (0 + 7 · 4) = f (0) = 0 m

d. ¿En qué puntos alcanza el delfín la altura máxima?

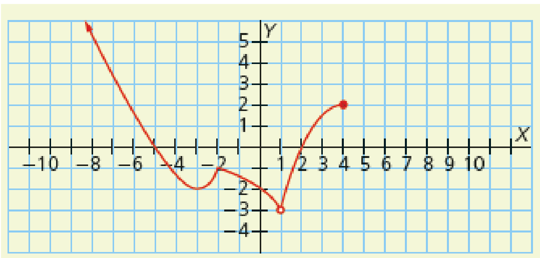
En los puntos (2 , 8), (6 , 8), (10 , 8), ..., (2 + 4k , 8) con k ∈ {0, 1, 2, …}.

e. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Creciente: (0 , 2) ∪ (4 , 6) ∪ (8 , 10) ∪ ... ∪ (4k , 4k + 2) con k ∈ {0, 1, 2, …};
decreciente: (2 , 4) ∪ (6 , 8) ∪ ... ∪ (4k + 2 , 4 · (k + 1)) con k ∈ {0, 1, 2, …}.

EVALUACIÓN

1 Dada la siguiente función, su dominio y su recorrido es:



a. D (f) = (–∞ , 4] y R (f) = [–3 , +∞)

b. D (f) = (–∞, 1) ∪ (1 , 4] y R (f) = (–3 , +∞)

c. D (f) = ℝ – {1} y R (f) = (–3 , +∞)

d. D (f) = (–∞ , 1) ∪ (1 , 4] y R (f) = [–3 , +∞)

2 Los puntos de corte de la función f (x) = 2x^2 – x – 3 con los ejes de coordenadas son:

a. (–1 , 0), $\left(\frac{3}{2},0\right)$ y (0 , –3)

b. (0 , –1), (0, $\frac{3}{2}$) y (–3 , 0)

c. (–1 , 0), (3 , 0) y (0 , –3)

d. (0 , –1), (0 , 3) y (–3 , 0)

Punto de corte con el eje *Y:*

f (0) = –3

Puntos de corte con el eje *X:*

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

3 La función representada en la actividad 1 es:

a. Creciente en (–3 , –2) U (1 , 4).

b. Creciente en (–3 , –2) U (1 , 4) y decreciente en (–∞ , 1).

c. Decreciente en (–∞ , –3] U [–2 , 1).

d. Decreciente en ℝ.

4 La función g ∘ f, donde f (x) = x + 3 y g (x) = 3x^2 – 2, es:

a. 3x^2 + 1 **c. 3x^2 + 25**

b. 3x^2 + 18x + 25 **d. 9x^2 + 54x + 79**

$3 \cdot (x+3)^2 - 2 = 3 \cdot (x^2 + 9 + 6x) - 2 = 3x^2 + 27 + 18x - 2 = 3x^2 + 18x + 25$

5 La función inversa de f (x) = $\frac{4}{3x-1}$ es:

a. $f^{-1}(x) = 3x + 3$ **c. $f^{-1}(x) = -3x + 5$**

b. $f^{-1}(x) = \frac{5}{3x}$ d. $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3x}$

$$y = \frac{4}{3x-1} \Rightarrow y(3x-1) = 4 \Rightarrow 3xy - y = 4 \Rightarrow x = \frac{4+y}{3y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4+x}{3x}$$