

**MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS
ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
3.º ESO**

somoslink

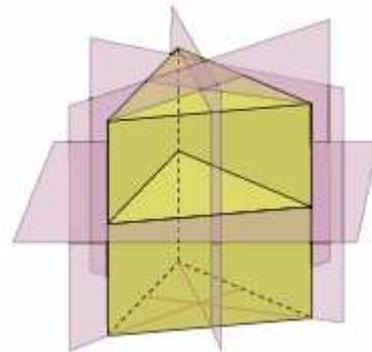
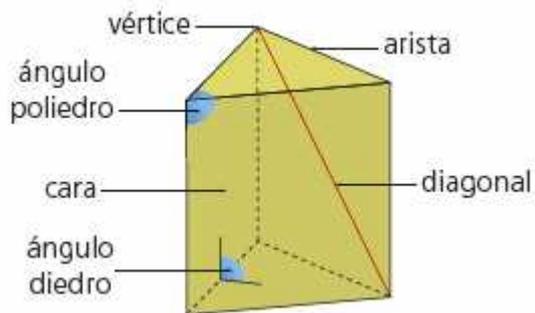
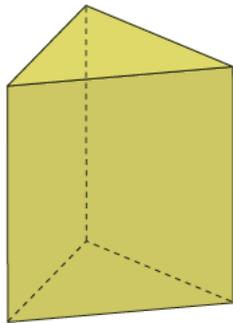
Unidad 12. Cuerpos geométricos

Unidad 12. Cuerpos geométricos

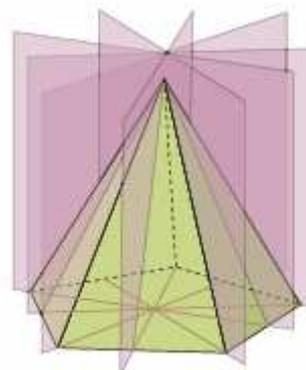
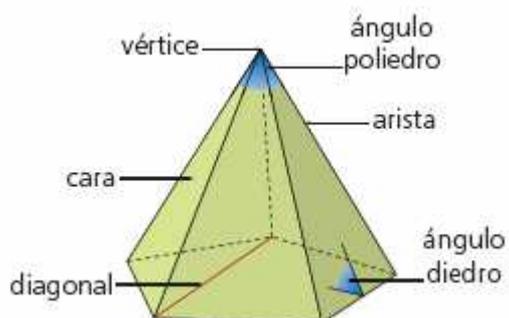
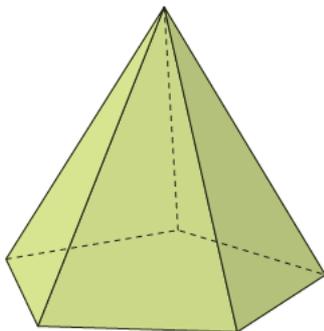
SOLUCIONES PÁG. 255

- 1 Dibuja en tu cuaderno estos poliedros. Señala sus elementos y sus planos de simetría:

a.



b.



2 Verifica que se cumple la fórmula de Euler en los sólidos platónicos.

Tetraedro: $4 + 4 = 6 + 2$

Cubo: $6 + 8 = 12 + 2$

Octaedro: $8 + 6 = 12 + 2$

Dodecaedro: $12 + 20 = 30 + 2$

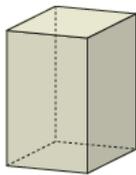
Icosaedro: $20 + 12 = 30 + 2$

3 Indica tres objetos que sean poliedros convexos, otros tres que sean cóncavos y otros tres que sean poliedros regulares.

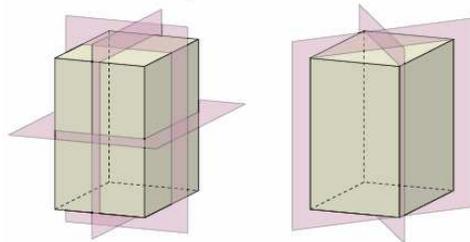
Respuesta abierta.

4 Indica cuál de estos poliedros es convexo y cuál cóncavo y comprueba si cumplen la fórmula de Euler. Dibújalos en tu cuaderno y señala sus planos de simetría.

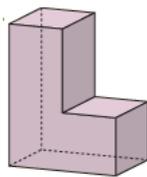
a.



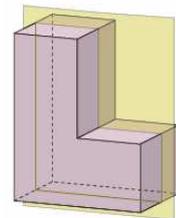
Convexo. $6 + 8 = 12 + 2$



b.



Cóncavo. $8 + 12 = 18 + 2$



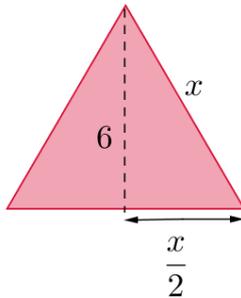
5 Halla el área y el volumen de un cubo de 5 cm de arista.

$$A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 6 \cdot 5^2 = 150 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 150 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 5^3 = 125 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 125 \text{ cm}^3$$

6 Determina el área de un icosaedro una de cuyas caras mide 6 m de altura.

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de las aristas:



$$x^2 = 6^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x^2 = 144 + x^2 \Rightarrow 3x^2 = 144 \Rightarrow x = 6,93$$

La arista del icosaedro mide 6,93 m.

$$A_{\text{icosaedro}} = 5a^2\sqrt{3} \Rightarrow A_{\text{icosaedro}} = 5 \cdot 6,93^2 \cdot \sqrt{3} = 415,91 \Rightarrow A_{\text{icosaedro}} = 415,91 \text{ m}^2$$

7 Calcula el volumen de un octaedro de 10 dm de arista.

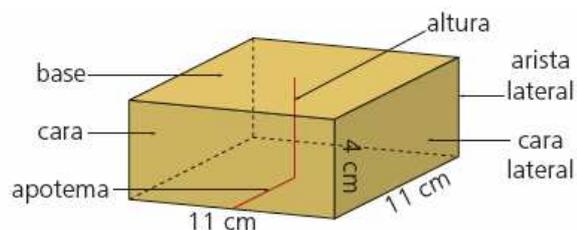
$$V_{\text{octaedro}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_{\text{octaedro}} = \frac{10^3\sqrt{2}}{3} = 471,4 \Rightarrow V_{\text{octaedro}} = 471,4 \text{ dm}^3$$

SOLUCIONES PÁG. 257

8 Mira a tu alrededor y busca tres objetos con forma de prisma.

Respuesta abierta.

9 Dibuja un prisma cuadrangular, señala sus elementos y calcula su área y su volumen, sabiendo que la arista de su base mide 11 cm y que tiene 4 cm de altura.



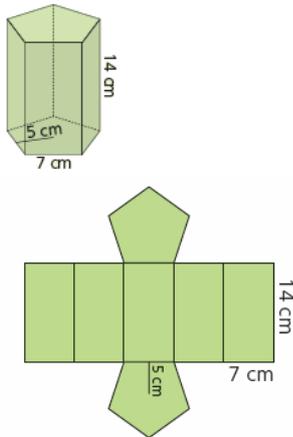
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 11^2 + 4 \cdot 4 \cdot 11 = 418 \Rightarrow A_{\text{total}} = 418 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 11^2 \cdot 4 = 484 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 484 \text{ cm}^3$$

10 Actividad resuelta.

11 Dibuja el desarrollo plano de los siguientes prismas y calcula su área total:

a.



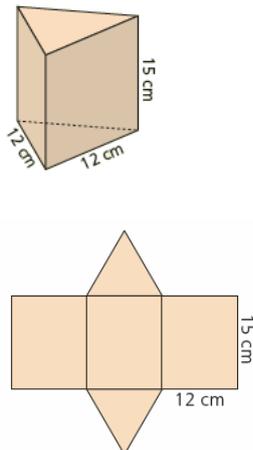
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{base}} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 5}{2} = 87,5 \Rightarrow A_{\text{base}} = 87,5 \text{ cm}^2$$

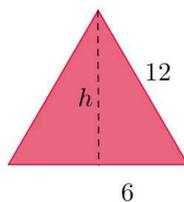
$$A_{\text{lateral}} = 7 \cdot 5 \cdot 14 = 490 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 87,5 + 490 = 665 \Rightarrow A_{\text{total}} = 665 \text{ cm}^2$$

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura de la base que es un triángulo equilátero:



$$12^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10,39 \Rightarrow h = 10,39 \text{ cm}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{12 \cdot 10,39}{2} + 3 \cdot 12 \cdot 15 = 664,68 \Rightarrow A_{\text{total}} = 664,68 \text{ cm}^2$$

- 12 Un prisma hexagonal de 3 dm de altura tiene un área lateral de 90 dm². Si la apotema de su base mide 4 dm, ¿cuánto mide su área total?

El área lateral es el área de un rectángulo:

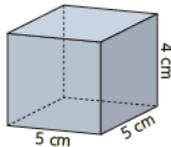
$$A = b \cdot h = P \cdot h \Rightarrow 90 = 6 \cdot l \cdot 3 \Rightarrow l = \frac{90}{6 \cdot 3} = 5 \Rightarrow l = 5 \text{ dm}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 90 \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 + 90 = 210 \Rightarrow A_{\text{total}} = 210 \text{ dm}^2$$

- 13 Calcula mentalmente el área total y el volumen de los siguientes prismas:

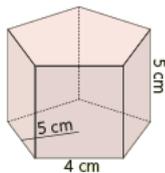
a.



$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 4 = 130 \Rightarrow A_{\text{total}} = 130 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 5^2 \cdot 4 = 100 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 100 \text{ cm}^3$$

b.



$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

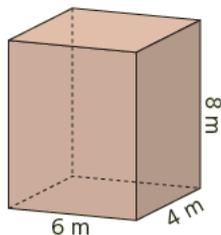
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 5 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{\text{total}} = 4 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 4 \cdot 5 = 200 \Rightarrow A_{\text{total}} = 200 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 5}{2} \cdot 5 = 250 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 250 \text{ cm}^3$$

- 14 ¿Cuál de estos dos prismas tiene mayor área?

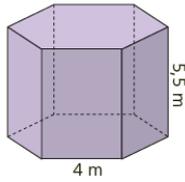
a.



$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 8 = 208$$

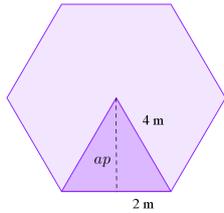
$$A_{\text{total}} = 208 \text{ m}^2$$

b.



$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 6 \cdot l \cdot h$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la base que es un hexágono regular:



$$4^2 = 2^2 + ap^2 \Rightarrow ap = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3,46 \Rightarrow ap = 3,46 \text{ m}$$

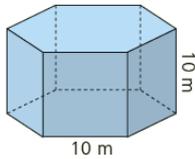
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 6 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot 4 \cdot 3,46 + 6 \cdot 4 \cdot 5,5 = 215,04$$

$$A_{\text{total}} = 215,04 \text{ m}^2$$

Tiene mayor área el prisma **b**.

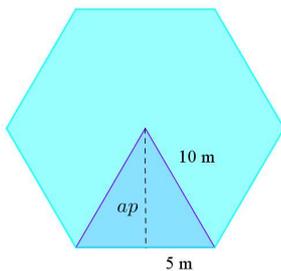
15 Halla el área total y el volumen de los siguientes prismas:

a.



$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 6 \cdot l \cdot h$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la base que es un hexágono regular:



$$10^2 = 5^2 + ap^2 \Rightarrow ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8,66 \Rightarrow ap = 8,66 \text{ m}$$

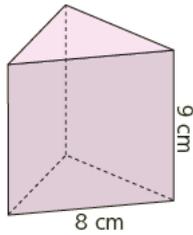
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 6 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot 10 \cdot 8,66 + 6 \cdot 10 \cdot 10 = 1119,6$$

$$A_{\text{total}} = 1119,6 \text{ m}^2$$

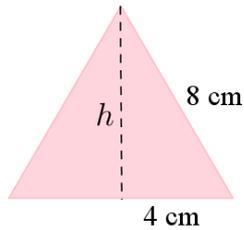
$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} \cdot 10 = 2598 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 2598 \text{ m}^3$$

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura de la base que es un triángulo equilátero:



$$8^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6,93 \Rightarrow h = 6,93 \text{ cm}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 6,93}{2} + 3 \cdot 8 \cdot 9 = 271,44 \Rightarrow A_{\text{total}} = 271,44 \text{ cm}^2$$

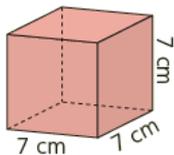
$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{prisma}} = \frac{b \cdot h_{\text{base}}}{2} \cdot h_{\text{prisma}} \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{8 \cdot 6,93}{2} \cdot 9 = 249,48 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 249,48 \text{ cm}^3$$

SOLUCIONES PÁG 259

16 Halla el área total y el volumen de los paralelepípedos.

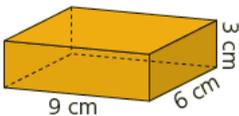
a.



$$A_{\text{cubo}} = 6a^2 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 6 \cdot 7^2 = 294 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 294 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 7^3 = 343 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 343 \text{ cm}^3$$

b.

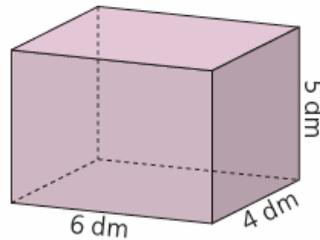


$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot a \cdot b + P \cdot h$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 9 \cdot 6 + (2 \cdot 9 + 2 \cdot 6) \cdot 3 = 198 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 9 \cdot 6 \cdot 3 = 162 \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 162 \text{ cm}^3$$

- 17 Dibuja un ortoedro con unas dimensiones de 4 y 6 dm de base y 5 dm de altura y calcula el área total y el volumen.



$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot a \cdot b + P \cdot h$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 6 \cdot 4 + (2 \cdot 6 + 2 \cdot 4) \cdot 5 = 148 \text{ dm}^2$$

$$V_{\text{ortoedro}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 120 \text{ dm}^3$$

- 18 Responde a las siguientes preguntas:

- a. Si se duplica la arista de la base de un ortoedro de base cuadrada y se mantiene igual la altura, ¿se duplicará también su volumen?

Sea un ortoedro cuyas dimensiones son: $a \times a \times h$. Al duplicar la arista de la base se tiene otro ortoedro de dimensiones: $2a \times 2a \times h$.

Para el primer ortoedro:

$$V_{\text{ortoedro 1}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = a \cdot a \cdot h = a^2 \cdot h$$

Para el segundo ortoedro:

$$V_{\text{ortoedro 2}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 2a \cdot 2a \cdot h = 4a^2 \cdot h$$

La relación entre sus volúmenes es:

$$\frac{V_{\text{ortoedro 1}}}{V_{\text{ortoedro 2}}} = \frac{a^2 \cdot h}{4 \cdot a^2 \cdot h} \Rightarrow \frac{V_{\text{ortoedro 1}}}{V_{\text{ortoedro 2}}} = \frac{\cancel{a^2} \cdot \cancel{h}}{4 \cdot \cancel{a^2} \cdot \cancel{h}} \Rightarrow V_{\text{ortoedro 2}} = 4 \cdot V_{\text{ortoedro 1}}$$

El volumen se cuadruplica.

- b. ¿Y si lo que se duplica es la altura y la arista lo que se mantiene igual?

Sea un ortoedro cuyas dimensiones son: $a \times a \times h$. Al duplicar la altura se tiene otro ortoedro de dimensiones: $a \times a \times 2h$.

Para el primer ortoedro:

$$V_{\text{ortoedro 1}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = a \cdot a \cdot h = a^2 \cdot h$$

Para el segundo ortoedro:

$$V_{\text{ortoedro 2}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = a \cdot a \cdot 2h = a^2 \cdot 2h$$

La relación entre sus volúmenes es:

$$\frac{V_{\text{ortoedro 1}}}{V_{\text{ortoedro 2}}} = \frac{a^2 \cdot h}{a^2 \cdot 2h} \Rightarrow \frac{V_{\text{ortoedro 1}}}{V_{\text{ortoedro 2}}} = \frac{\cancel{a^2} \cdot \cancel{h}}{\cancel{a^2} \cdot 2 \cdot \cancel{h}} \Rightarrow V_{\text{ortoedro 2}} = 2 \cdot V_{\text{ortoedro 1}}$$

El volumen se duplica.

- c. Comprueba tus respuestas a las dos preguntas anteriores inventando valores para los elementos del ortoedro y calculando el volumen.

$$V_{\text{ortoedro inicial}}: a^2 \cdot h$$

$$V_{\text{ortoedro arista doble}}: 4a^2 \cdot h$$

$$V_{\text{ortoedro altura doble}}: 2a^2 \cdot h$$

- d. ¿Duplicará un cubo su volumen al duplicar la arista?

Sea un cubo de arista a . Al duplicar la arista se tiene otro cubo con arista $2a$.

Para el primer cubo:

$$V_{\text{cubo}} = a^3$$

Para el segundo cubo:

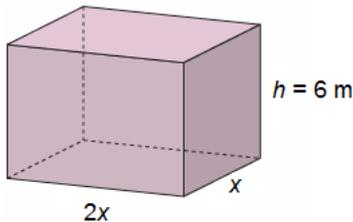
$$V_{\text{cubo}} = (2a)^3 = 8a^3$$

La relación entre sus volúmenes es:

$$\frac{V_{\text{cubo 1}}}{V_{\text{cubo 2}}} = \frac{a^3}{(2a)^3} \Rightarrow \frac{V_{\text{cubo 1}}}{V_{\text{cubo 2}}} = \frac{a^3}{8a^3} \Rightarrow V_{\text{cubo 2}} = 8 \cdot V_{\text{cubo 1}}$$

El volumen es ocho veces mayor.

- 19 Un ortoedro de 6 m de altura tiene un área lateral de 180 m². Si su base mide el doble de largo que de ancho, ¿cuánto miden su área total y su volumen?**



Se calcular el valor de x a partir del área lateral:

$$A_{\text{lateral}} = P \cdot h \Rightarrow A_{\text{lateral}} = (2 \cdot 2x + 2 \cdot x) \cdot h \Rightarrow 180 = 6x \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{180}{36} = 5$$

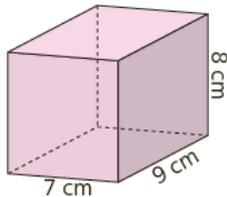
La base mide 10 m de largo y 5 m de ancho.

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 10 \cdot 5 + 180 = 280 \Rightarrow A_{\text{total}} = 280 \text{ m}^2$$

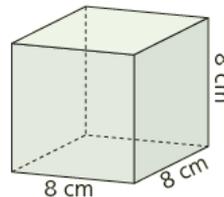
$$V_{\text{ortoedro}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 10 \cdot 5 \cdot 6 = 300 \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 300 \text{ m}^3$$

- 20 Fíjate en estas figuras:**

I.



II.



- a. ¿Cuál de estos dos paralelepípedos tiene mayor área?**

$$A_{\text{I}} = A_{\text{ortoedro}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{ortoedro}} = 2 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot 9 \cdot 8 = 382 \Rightarrow A_{\text{ortoedro}} = 382 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{II}} = A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2$$

Tiene mayor área el cubo.

- b. ¿Y mayor volumen?**

$$V_{\text{I}} = V_{\text{ortoedro}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 7 \cdot 9 \cdot 8 = 504 \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 504 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{II}} = V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 8^3 = 512 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 512 \text{ cm}^3$$

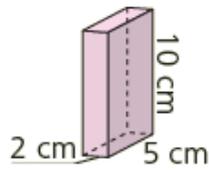
Tiene mayor volumen el cubo.

- c. ¿Qué dimensiones debería tener el cubo para que ambos paralelepípedos tuvieran el mismo volumen?**

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow 504 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{504} = 7,96 \Rightarrow a = 7,96 \text{ cm}$$

21 Calcula mentalmente el área y el volumen de los siguientes paralelepípedos:

a.

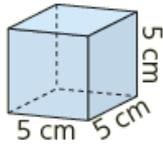


$$A_{\text{ortopedro}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{ortopedro}} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 10 = 160 \Rightarrow A_{\text{ortopedro}} = 160 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{ortopedro}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortopedro}} = 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100 \Rightarrow V_{\text{ortopedro}} = 100 \text{ cm}^3$$

b.

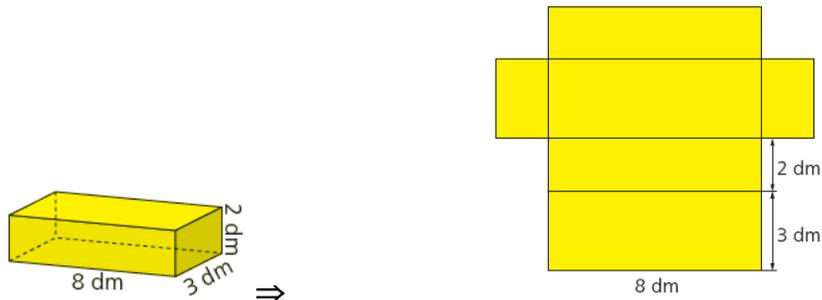


$$A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 5^3 = 125 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 125 \text{ cm}^3$$

22 Dibuja el desarrollo plano de estos paralelepípedos y calcula su área total:

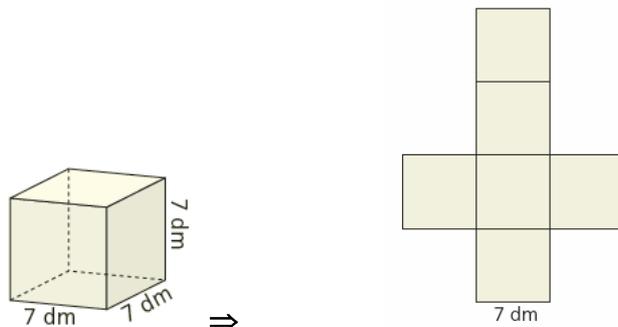
a.



$$A_{\text{ortopedro}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{ortopedro}} = 2 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 92 \Rightarrow A_{\text{ortopedro}} = 92 \text{ dm}^2$$

b.



$$A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ dm}^2$$

- 23 ¿Qué dimensiones debe tener un cubo para que su área total y su volumen coincidan?**

Sea un cubo de arista a . Para que el área total y el volumen coincidan, deben ser iguales, esto es:

$$A_{\text{cubo}} = V_{\text{cubo}} \Rightarrow 6 \cdot a^2 = a^3 \Rightarrow \frac{a^3}{a^2} = 6 \Rightarrow a = 6 \text{ unidades}$$

- 24 Halla la longitud de la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 9 y 7 dm de base y 11 dm de altura.**

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow D = \sqrt{9^2 + 7^2 + 11^2} = \sqrt{251} = 15,84$$

$$D = 15,84 \text{ dm}$$

- 25 Calcula la máxima distancia que se puede trazar en línea recta en un cubo cuya área total son 384 cm².**

Se calcula el valor de la arista del cubo:

$$A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow 384 = 6 \cdot a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{384}{6}} = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow a = 8 \text{ cm}$$

La distancia máxima es la diagonal del cubo.

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = \sqrt{3 \cdot 8^2} = \sqrt{192} = 13,86 \Rightarrow D = 13,86 \text{ cm}$$

La distancia es de 13,86 cm.

- 26 Una comunidad de vecinos quiere recubrir con pintura protectora el vaso de una piscina que tiene forma de ortoedro y unas dimensiones, en metros, de 10 × 6 × 2.**

- a. ¿Qué superficie tiene que recubrir?**

$$A_{\text{piscina}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{piscina}} = 10 \cdot 6 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 2 = 124 \Rightarrow A_{\text{piscina}} = 124 \text{ m}^2$$

- b. Si el rendimiento de la pintura es de 7 m² por cada litro y se vende en botes de 5 L cuyo precio es de 14 €, ¿cuánto costará pintar el vaso de la piscina?**

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ L} \xrightarrow{\text{se pintan}} 7 \text{ m}^2 \\ x \text{ L} \xrightarrow{\text{se pintan}} 124 \text{ m}^2 \end{array} \right\} x = \frac{124}{7} = 17,71 \text{ L}$$

Se necesitan 4 botes de 5 L.

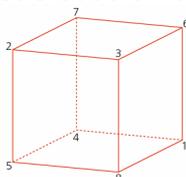
$$4 \cdot 14 = 56 \Rightarrow \text{Costará } 56 \text{ €}.$$

- 27 Visita esta página de Internet para repasar estos contenidos y realiza las actividades propuestas:**

<http://conteni2.educarex.es/mats/12000/contenido/>

Respuesta abierta.

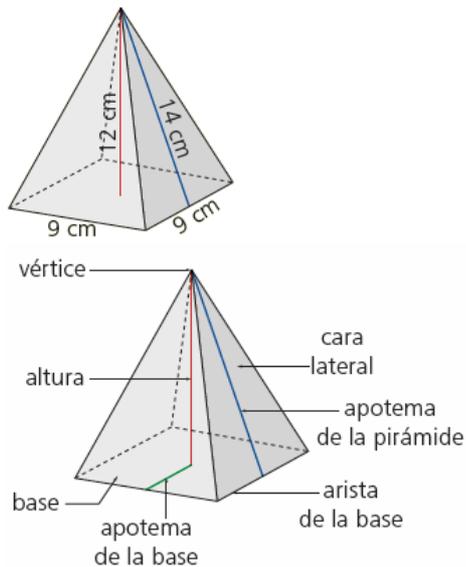
- 28 Coloca en cada uno de los ocho vértices de un cubo uno de los números de la serie del 1 al 8, de forma que, en cada cara, la suma de los números de sus cuatro vértices arroje siempre el mismo resultado.**



SOLUCIONES PÁG. 261

29 Señala los elementos de estas pirámides y halla el área total y el volumen de cada una de ellas:

a.



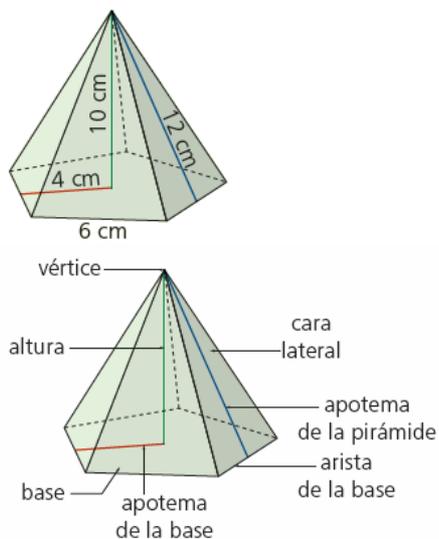
La base es un cuadrado, y la apotema de la base es la mitad del lado del cuadrado:

$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 9 \cdot 4 \cdot \frac{14 + 4,5}{2} = 333 \Rightarrow A_{\text{total}} = 333 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} 9^2 \cdot 12 = 324$$

$$V_{\text{pirámide}} = 324 \text{ cm}^3$$

b.



$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot 5 \cdot \frac{12 + 4}{2} = 240 \Rightarrow A_{\text{total}} = 240 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \frac{P \cdot ap'}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} \cdot 10 = 200$$

$$V_{\text{pirámide}} = 200 \text{ cm}^3$$

- 30 Halla el área total y el volumen de una pirámide heptagonal de 9 dm de altura y cuya base tiene una arista de 7 dm y una apotema de 6 dm.**

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide:

$$ap^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow ap = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = 10,82 \Rightarrow ap = 10,82 \text{ dm}$$

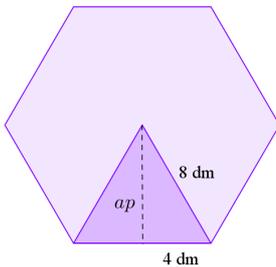
$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 7 \cdot 7 \cdot \frac{10,82 + 6}{2} = 412,09 \Rightarrow A_{\text{total}} = 412,09 \text{ dm}^2$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \frac{P \cdot ap'}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 7 \cdot 6}{2} \cdot 9 = 441$$

$$V_{\text{pirámide}} = 441 \text{ dm}^3$$

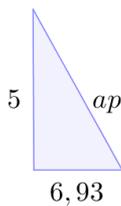
- 31 Halla el área total y el volumen de una pirámide hexagonal con una arista de la base de 8 dm y una altura de 5 dm.**

Se aplica el teorema de Pitágoras a la base para hallar la apotema de la base:



$$8^2 = 4^2 + ap'^2 \Rightarrow ap' = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6,93 \Rightarrow ap' = 6,93 \text{ dm}$$

Se aplica el teorema de Pitágoras a la pirámide para hallar la apotema de la pirámide:



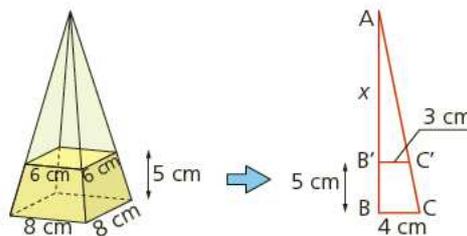
$$ap^2 = h^2 + ap'^2 \Rightarrow ap = \sqrt{5^2 + 6,93^2} = \sqrt{73,02} = 8,55 \Rightarrow ap = 8,55 \text{ dm}$$

$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 8 \cdot 6 \cdot \frac{8,55 + 6,93}{2} = 371,52 \Rightarrow A_{\text{total}} = 371,52 \text{ dm}^2$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \frac{P \cdot ap'}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 6,93}{2} \cdot 5 = 277,2$$

$$V_{\text{pirámide}} = 277,2 \text{ dm}^3$$

- 32 Calcula el volumen de este tronco de pirámide. Observa la relación de semejanza de triángulos en la pirámide original.**



Se aplica el teorema de Tales para calcular la altura de la pirámide:

$$\frac{x}{3} = \frac{x+5}{4} \Rightarrow 4x = 3 \cdot (x+5) \Rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

La altura de la pirámide original mide 20 cm.

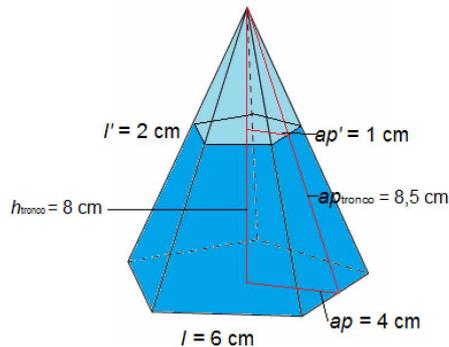
$$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$$

$$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} 8^2 \cdot 20 = 426,67$$

$$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} l'^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} 6^2 \cdot 15 = 180$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = 426,67 - 180 = 246,67 \Rightarrow V_{\text{tronco de pirámide}} = 246,67 \text{ cm}^3$$

- 33** Calcula el área total y el volumen de un tronco de pirámide pentagonal de 8,5 cm de apotema, 8 cm de altura, 6 cm y 2 cm de aristas de las bases, respectivamente, y 4 cm y 1 cm de apotemas, respectivamente.

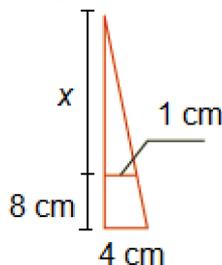


$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} + A_{\text{base}'} = n \cdot \frac{(l + l') \cdot ap_{\text{lateral}}}{2} + \frac{P \cdot ap}{2} + \frac{P' \cdot ap'}{2}$$

$$A_{\text{total}} = 5 \cdot \frac{(6 + 2) \cdot 8,5}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 1}{2} = \frac{340 + 120 + 10}{2} = 235 \Rightarrow A_{\text{total}} = 235 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$$

Se aplica el teorema de Tales para calcular la altura de la pirámide pequeña:



$$\frac{x}{1} = \frac{x + 8}{4} \Rightarrow 4x = x + 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3} = 2,67$$

$$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} \cdot 10,67 = 213,4$$

$$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{P' \cdot ap'}{2} \cdot h' \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 1}{2} \cdot 2,67 = 4,45$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = 213,4 - 4,45 = 208,95 \Rightarrow V_{\text{tronco de pirámide}} = 208,95 \text{ cm}^3$$

- 34 Realizad un concurso fotográfico. Cada uno deberéis presentar una fotografía matemática que gire en torno a motivos relacionados con los poliedros.**

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 263

- 1 Las caras de los sólidos platónicos son triángulos, cuadrados o pentágonos. ¿Por qué no pueden existir poliedros regulares con caras hexagonales?**

Si las caras fueran hexágonos, en cada vértice solo podrían concurrir dos hexágonos, porque al ser 120° su ángulo interior, si concurrieran tres hexágonos, sumarían 360° , que no puede ser. Y dos caras solamente no pueden concurrir en un vértice de un poliedro.

- 2 Realiza en tu cuaderno el dibujo de los siguientes prismas y señala en cada uno de ellos sus elementos:**

- a. Base triangular, recto y regular.**

Respuesta abierta.

- b. Base cuadrangular, recto e irregular.**

Respuesta abierta.

- c. Base pentagonal, oblicuo y regular.**

Respuesta abierta.

- d. Base hexagonal, oblicuo e irregular.**

Respuesta abierta.

- 3 Indica el nombre de tres paralelepípedos.**

Ortoedro, cubo y romboedro.

- 4 ¿Cuál es la diferencia entre la apotema de una pirámide y la de su base?**

La apotema de una pirámide es la altura de los triángulos laterales.

- 5 Explica cómo se genera un tronco de pirámide.**

El tronco de pirámide se forma al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base y desprejar la pirámide correspondiente al vértice.

- 6 ¿Existe alguna relación entre el volumen del prisma y el de la pirámide? Indica cuántas veces es mayor uno respecto del otro.**

Sí. El volumen del prisma es el triple que el de la pirámide, siempre y cuando ambos tengan las mismas dimensiones, igual altura y base.

- 7 Realiza una presentación a tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, utilizar Glogster...**

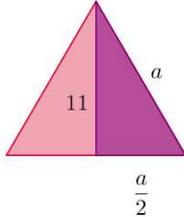
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 264 - REPASO FINAL

POLIEDROS

- 1 **Calcula el área y el volumen de un octaedro una de cuyas caras tiene una altura de 11 cm. Dibújalo en tu cuaderno y señala alguno de sus planos de simetría.**

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la arista del octaedro:



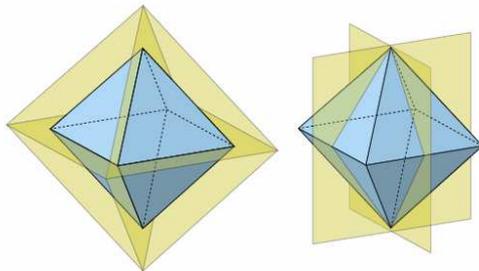
$$a^2 = 11^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 11^2 + \frac{a}{4} \Rightarrow 4a^2 = 484 + a \Rightarrow 4a^2 - a - 484 = 0$$

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-484)}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 7744}}{8} = \frac{1 \pm 88}{8} = \begin{cases} a = 11,13 \\ a = -10,88 \end{cases}$$

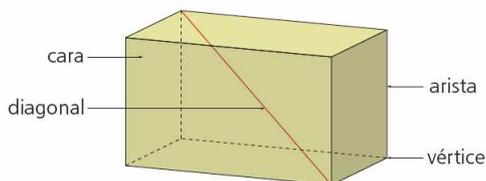
La solución negativa no es válida.

$$A_{\text{octaedro}} = 2 \cdot a^2 \sqrt{3} \Rightarrow A_{\text{octaedro}} = 2 \cdot 11,13^2 \sqrt{3} = 429,12 \Rightarrow A_{\text{octaedro}} = 429,12 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{octaedro}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_{\text{octaedro}} = \frac{11,13^3 \sqrt{2}}{3} = 649,95 \Rightarrow V_{\text{octaedro}} = 649,95 \text{ cm}^3$$



- 2 **Dibuja una caja de zapatos y señala sus elementos.**



- a. **Comprueba la fórmula de Euler.**

$$6 \text{ caras, } 8 \text{ vértices, } 12 \text{ aristas: } 6 + 8 = 12 + 2$$

- b. **¿Es un poliedro regular?**

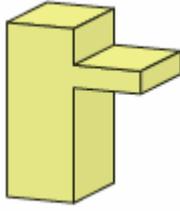
No, porque sus caras no son todas iguales.

- c. **¿Tiene centro de simetría?**

Sí, el centro del poliedro.

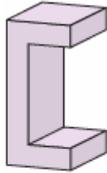
3 Comprueba si se cumple la fórmula de Euler en los siguientes poliedros:

a.



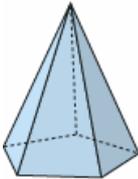
12 caras, 16 vértices, 24 aristas: $12 + 16 \neq 24 + 2$

b.



10 caras, 16 vértices, 24 aristas: $10 + 16 = 24 + 2$

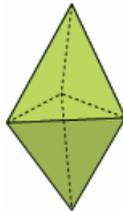
c.



6 caras, 6 vértices, 10 aristas: $6 + 6 = 10 + 2$

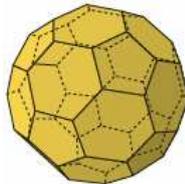
4 Explica por qué no son regulares estos poliedros:

a.



No concurren el mismo número de caras en cada vértice.

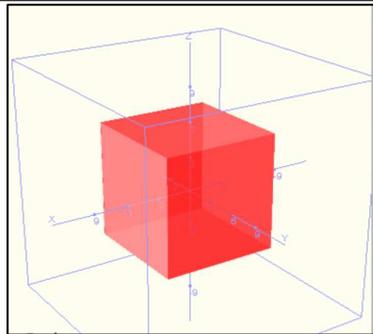
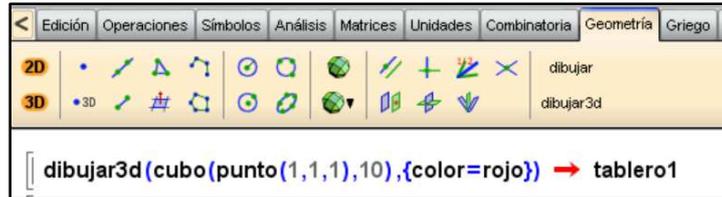
b.



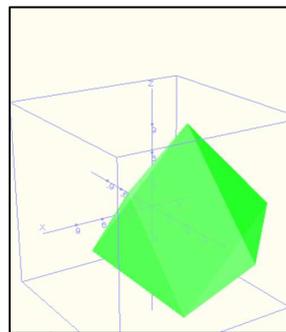
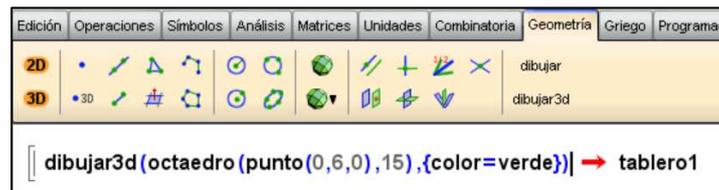
No son iguales todas las caras.

5 Con el programa Wiris, realiza los siguientes dibujos:

a. Un cubo de dimensión 10, centrado en el punto $(1, 1, 1)$. Coloréalo de rojo.



b. Un octaedro de dimensión 15, centrado en el punto $(0, 6, 0)$. Coloréalo de verde.

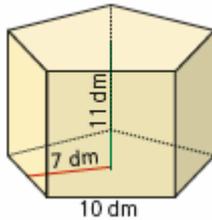


6 Por parejas, usad materiales como el polydron, para construir los sólidos platónicos y otros poliedros.
Respuesta abierta.

PRISMAS

7 Halla el área total y el volumen de estos prismas:

a.



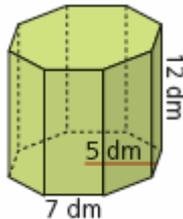
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 5 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{\text{total}} = 10 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 10 \cdot 11 = 900 \Rightarrow A_{\text{total}} = 900 \text{ dm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 7}{2} \cdot 11 = 1925 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 1925 \text{ dm}^3$$

b.



$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 6 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{\text{total}} = 7 \cdot 8 \cdot 5 + 6 \cdot 7 \cdot 12 = 952 \Rightarrow A_{\text{total}} = 952 \text{ dm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{2} \cdot 12 = 1680 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 1680 \text{ dm}^3$$

8 El volumen de un prisma regular es de $1\,386 \text{ cm}^3$. Si tiene una altura de 11 cm, la arista de su base de 4 cm, y la apotema de 7 cm, indica de qué prisma se trata.

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow 1386 = \frac{n \cdot 4 \cdot 7}{2} \cdot 11 \Rightarrow n = \frac{1386 \cdot 2}{4 \cdot 7 \cdot 11} = 9 \Rightarrow n = 9$$

Es un prisma de base un eneágono regular.

9 Se quiere construir un caleidoscopio en forma de prisma octogonal de 20 cm de altura, 3 cm de arista de la base y 5 cm de apotema.

a. ¿Qué cantidad de cristal se empleará para construirlo?

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

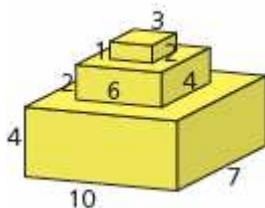
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 8 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{\text{total}} = 3 \cdot 8 \cdot 5 + 8 \cdot 3 \cdot 20 = 600 \Rightarrow A_{\text{total}} = 600 \text{ cm}^2$$

- b. Si el cristal se vende por planchas cuadradas de 20 cm de lado, ¿cuántas serán necesarias para cortar las bases y las caras laterales?

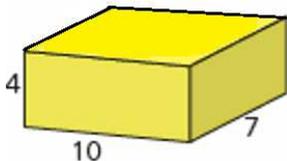
Necesito tres planchas. Las ocho caras laterales son rectángulos de 20 cm de largo por 3 cm de ancho, necesito dos planchas. De una plancha puedo obtener seis caras laterales y de la otra plancha dos caras laterales, sobrando un trozo de plancha de 14×20 cm. De este trozo de plancha puedo obtener una base pues son octógonos que se inscriben en círculos de 10,44 cm de diámetro. Y de una tercera plancha obtengo la otra base.

- 10 Halla el área total y el volumen de las siguientes figuras cuyas dimensiones vienen dadas en centímetros:

a.



Se calcula el área total del prisma inferior:

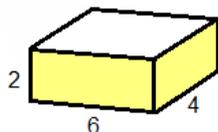


$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot 10 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 4 = 276$$

$$A_{\text{prisma inferior}} = 276 \text{ cm}^2$$

Se calcula el área lateral del prisma intermedio:



$$A_{\text{lateral prisma intermedio}} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

$$A_{\text{lateral prisma intermedio}} = 2 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 40 \Rightarrow A_{\text{lateral prisma intermedio}} = 40 \text{ cm}^2$$

Se calcula el área lateral del prisma superior:



$$A_{\text{lateral prisma inferior}} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

$$A_{\text{lateral prisma inferior}} = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \Rightarrow A_{\text{lateral prisma inferior}} = 10 \text{ cm}^2$$

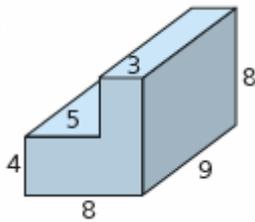
El área total de la figura es la suma de las tres áreas anteriores:

$$A_{\text{total}} = 276 + 40 + 10 = 326 \text{ cm}^2$$

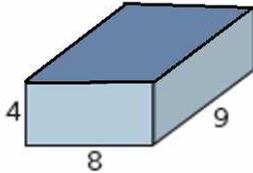
$$V_{\text{figura}} = A_{\text{base 1}} \cdot h_1 + A_{\text{base 2}} \cdot h_2 + A_{\text{base 3}} \cdot h_3$$

$$V_{\text{figura}} = 10 \cdot 7 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 280 + 48 + 6 = 334 \text{ cm}^3$$

b.



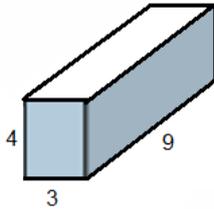
Se calcula el área total del prisma inferior:



$$A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot 8 \cdot 9 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 4 = 280$$

$$A_{\text{prisma inferior}} = 280 \text{ cm}^2$$

Se calcula el área lateral del prisma superior:



$$A_{\text{lateral prisma superior}} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

$$A_{\text{lateral prisma superior}} = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 4 = 96 \Rightarrow A_{\text{lateral prisma superior}} = 96 \text{ cm}^2$$

El área total de la figura es la suma de las dos áreas anteriores:

$$A_{\text{total}} = 280 + 96 = 376 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{figura}} = A_{\text{base 1}} \cdot h_1 + A_{\text{base 2}} \cdot h_2$$

$$V_{\text{figura}} = 8 \cdot 9 \cdot 4 + 3 \cdot 9 \cdot 4 = 288 + 108 = 396 \text{ cm}^3$$

- 11 La piscina de Alejandro tiene forma de prisma rectangular con unas dimensiones de 8 m x 4 m y una altura de 2 m.

a. ¿Cuántos litros de agua caben en la piscina?

$$V_{\text{piscina}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{piscina}} = 8 \cdot 4 \cdot 2 = 64 \Rightarrow V_{\text{piscina}} = 64 \text{ m}^3 = 64\,000 \text{ L}$$

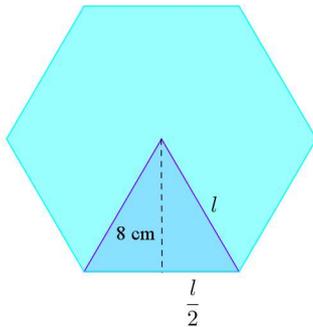
b. Si se llena a razón de 100 L por minuto, ¿cuántas horas y minutos tardará en llenarse?

$$\frac{64\,000}{100} = 640 \text{ minutos}$$

$$\begin{array}{r} 640' \overline{) 60} \\ 040' \quad 1 \end{array} \Rightarrow \text{Tardará 1 hora y 40 minutos.}$$

- 12 **Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular que tiene 780 cm² de área total y 8 cm de apotema.**

Se aplica el teorema de Pitágoras a la base, que es un hexágono, para calcular la longitud del lado:



$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + ap^2 \Rightarrow l^2 = \frac{l^2}{4} + 8^2 \Rightarrow 4l^2 = l^2 + 4 \cdot 8^2 \Rightarrow 3l^2 = 256$$

$$l = \sqrt{\frac{256}{3}} = \sqrt{85,33} = 9,24 \Rightarrow l = 9,24 \text{ cm}$$

Se calcula la altura del prisma:

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

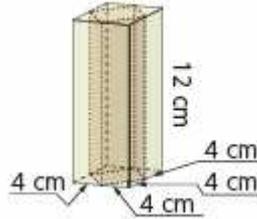
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h \Rightarrow 780 = 6 \cdot 9,24 \cdot 8 + 6 \cdot 9,24 \cdot h$$

$$h = \frac{780 - 443,52}{55,44} = 6,07 \Rightarrow h = 6,07 \text{ cm}$$

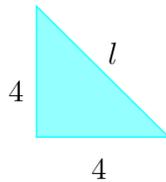
$$V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{6 \cdot 9,24 \cdot 8}{2} \cdot 6,07 = 1346,1 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 1346,1 \text{ cm}^3$$

PARALELEPÍEDOS

13 Halla el área total y el volumen del paralelepípedo interior:



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el lado del paralelepípedo interior:



$$l^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow l = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow l = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5,66 \Rightarrow l = 5,66 \text{ cm}$$

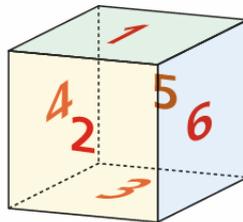
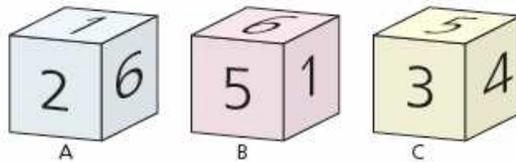
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot a^2 + P \cdot h \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 5,66^2 + 4 \cdot 5,66 \cdot 12 = 335,75 \Rightarrow A_{\text{total}} = 335,75 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 5,66^2 \cdot 12 = 384,43$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 384,43 \text{ cm}^3$$

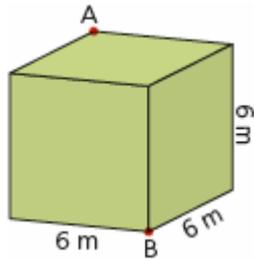
14 Deduce los números ocultos de este dado:



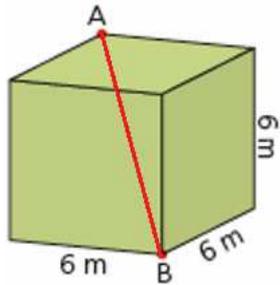
SOLUCIONES PÁG. 265

15 Halla la distancia entre los puntos A y B:

a.

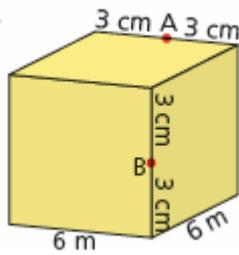


La distancia entre los puntos A y B es la diagonal del cubo:

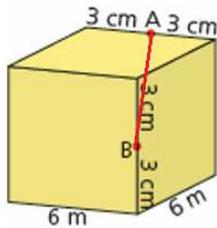


$$D^2 = 3a^2 \Rightarrow D = \sqrt{3 \cdot 6^2} = \sqrt{108} = 10,39 \Rightarrow D = 10,39 \text{ m}$$

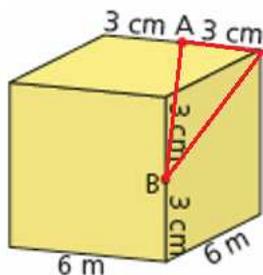
b.



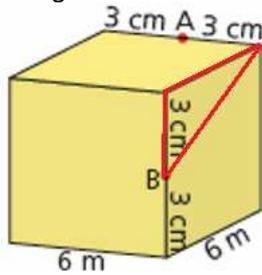
La distancia entre los puntos A y B es:



Dicha distancia es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado:

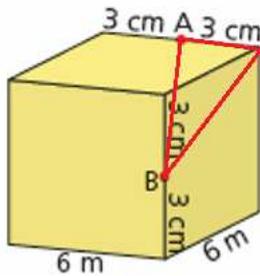


Para hallar la hipotenusa sobre la cara derecha se aplica el teorema de Pitágoras:



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 6,71 \Rightarrow$ La hipotenusa de la cara derecha mide 6,71 m.

Esta hipotenusa es un cateto del triángulo rectángulo:



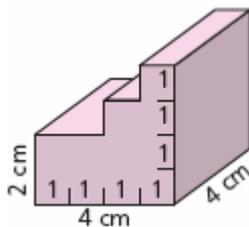
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre los puntos A y B:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{6,71^2 + 3^2} = \sqrt{54,02} = 7,35$

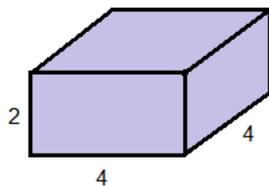
La distancia entre los puntos A y B es de 7,35 m.

16 Halla el área total y el volumen de los siguientes paralelepípedos:

a.



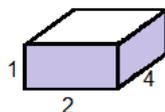
Se calcula el área total del prisma inferior:



$A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 64$

$A_{\text{prisma inferior}} = 64 \text{ cm}^2$

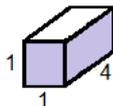
Se calcula el área lateral del prisma intermedio:



$A_{\text{lateral prisma intermedio}} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

$A_{\text{lateral prisma intermedio}} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 = 12 \Rightarrow A_{\text{lateral prisma intermedio}} = 12 \text{ cm}^2$

Se calcula el área lateral del prisma superior:



$$A_{\text{lateral prisma superior}} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

$$A_{\text{lateral prisma superior}} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 = 10 \Rightarrow A_{\text{lateral prisma superior}} = 10 \text{ cm}^2$$

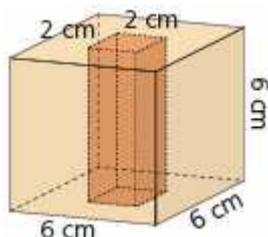
El área total de la figura es la suma de las tres áreas:

$$A_{\text{total}} = 64 + 12 + 10 = 86 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{figura}} = A_{\text{base 1}} \cdot h_1 + A_{\text{base 2}} \cdot h_2 + A_{\text{base 3}} \cdot h_3$$

$$V_{\text{figura}} = 4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1 = 32 + 8 + 4 = 44 \text{ cm}^3$$

b.



$$A_{\text{total}} = A_{\text{cubo}} + A_{\text{lateral ortoedro}} - 2 \cdot A_{\text{base ortoedro}}$$

$$A_{\text{total}} = 6 \cdot 6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2^2 = 216 + 48 - 8 = 256 \text{ cm}^2$$

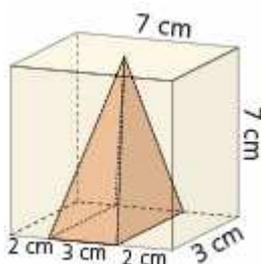
$$V_{\text{figura}} = V_{\text{cubo}} - V_{\text{ortoedro}} = a^3 - a \cdot b \cdot c$$

$$V_{\text{figura}} = 6^3 - 2 \cdot 2 \cdot 6 = 216 - 24 = 192 \text{ cm}^3$$

PIRÁMIDE Y TRONCO DE PIRÁMIDE

17 Calcula el volumen contenido entre cada par de figuras.

a.



$$V_{\text{total}} = V_{\text{ortoedro}} - V_{\text{pirámide cuadrangular}}$$

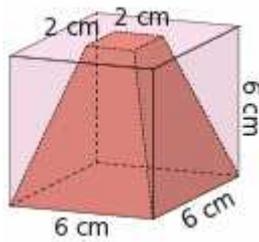
$$V_{\text{ortoedro}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 7 \cdot 3 \cdot 7 = 147 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{pirámide cuadrangular}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} \Rightarrow V_{\text{pirámide cuadrangular}} = \frac{3^2 \cdot 7}{3} = 21$$

$$V_{\text{pirámide cuadrangular}} = 21 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = 147 - 21 = 126 \text{ cm}^3$$

b.

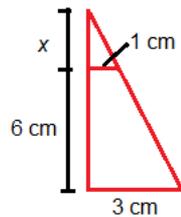


$$V_{\text{total}} = V_{\text{cubo}} - V_{\text{tronco de pirámide}}$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$$

Se aplica el teorema de Tales para calcular la altura de la pirámide:



$$\frac{x}{1} = \frac{x+6}{3} \Rightarrow 3x = 1 \cdot (x+6) \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

La altura de la pirámide original mide 9 cm.

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$$

$$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} 6^2 \cdot 9 = 108$$

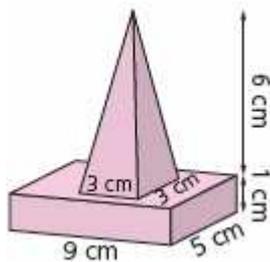
$$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} 2^2 \cdot 3 = 4$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = 108 - 4 = 104 \Rightarrow V_{\text{tronco de pirámide}} = 104 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = V_{\text{cubo}} - V_{\text{tronco de pirámide}} = 216 - 104 = 112 \text{ cm}^3$$

18 Halla el volumen de estas figuras:

a.



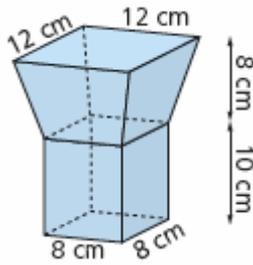
$$V_{\text{total}} = V_{\text{ortoedro}} + V_{\text{pirámide}}$$

$$V_{\text{ortoedro}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 9 \cdot 5 \cdot 1 = 45 \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 45 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} 3^2 \cdot 6 = 18 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = V_{\text{ortoedro}} + V_{\text{pirámide}} = 45 + 18 = 63 \text{ cm}^3$$

b.

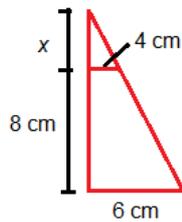


$$V_{\text{total}} = V_{\text{ortopedro}} + V_{\text{tronco de pirámide}}$$

$$V_{\text{ortopedro}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{\text{ortopedro}} = 8 \cdot 8 \cdot 10 = 640 \Rightarrow V_{\text{ortopedro}} = 640 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$$

Se aplica el teorema de Tales para calcular la altura de la pirámide:



$$\frac{x}{4} = \frac{x+8}{6} \Rightarrow 6x = 4 \cdot (x+8) \Rightarrow x = 16 \text{ cm}$$

La altura de la pirámide original mide 24 cm.

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$$

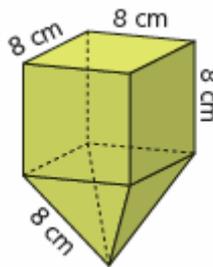
$$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} 12^2 \cdot 24 = 1152$$

$$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} 8^2 \cdot 16 = 341,33$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = 1152 - 341,33 = 810,67 \Rightarrow V_{\text{tronco de pirámide}} = 810,67 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = V_{\text{ortopedro}} + V_{\text{tronco de pirámide}} = 640 + 810,67 = 1\,450,67 \text{ cm}^3$$

19 Determina el área total y el volumen de esta figura:



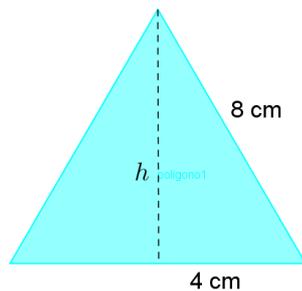
$$A_{\text{total}} = A_{\text{cubo}} - A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{lateral pirámide}}$$

$$A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 6 \cdot 8^2 = 384 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 384 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{cuadrado}} = l^2 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 8^2 = 64 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 64 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{lateral pirámide}} = 4 \cdot A_{\text{triángulo equilátero}} = 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura del triángulo equilátero:



$$a^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6,93 \Rightarrow h = 6,93 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral pirámide}} = 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

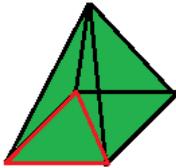
$$A_{\text{lateral pirámide}} = 4 \cdot \frac{8 \cdot 6,93}{2} = 110,88 \Rightarrow A_{\text{lateral pirámide}} = 110,88 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{cubo}} - A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{lateral pirámide}} = 384 - 64 + 110,88 = 430,88 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{total}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirámide}}$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 8^3 = 512 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 512 \text{ cm}^3$$

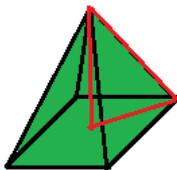
Se aplica el teorema de Pitágoras a la base de la pirámide para calcular la diagonal:



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 11,31$$

La mitad de la diagonal mide 5,66 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura de la pirámide:



$$a^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow h = \sqrt{8^2 - 5,66^2} = \sqrt{64 - 32,04} = 5,65$$

La altura de la pirámide mide 5,65 cm.

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} 8^2 \cdot 5,65 = 120,53$$

$$V_{\text{pirámide}} = 120,53 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = 512 + 120,53 = 632,53 \text{ cm}^3$$

EVALUACIÓN

1 El número de aristas de un octaedro es:

- a. 8 b. 6 c. 10 d. 12

Un ortoedro tiene 12 aristas.

2 El área de un tetraedro de 4 m de arista es:

- a. 27,71 m² b. 64 m² c. 16 m² d. 32,65 m²

$$A_{\text{tetraedro}} = a^2 \sqrt{3} \Rightarrow A_{\text{tetraedro}} = 4^2 \cdot \sqrt{3} = 27,71 \text{ cm}^2$$

3 El área de un prisma pentagonal regular de 8 m de altura, 5 m de arista básica y 4 m de apotema es:

- a. 200 m² b. 300 m² c. 600 m² d. 500 m²

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{base}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 50 \Rightarrow A_{\text{base}} = 50 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{lateral}} = 5 \cdot 5 \cdot 8 = 200 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 50 + 200 = 300 \Rightarrow A_{\text{total}} = 300 \text{ m}^2$$

4 El volumen de un prisma rectangular de 11 m de altura y cuya base tiene unas dimensiones de 4 m x 5 m es:

- a. 220 m³ b. 180 m³ c. 216,3 m³ d. 195,4 m³

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 4 \cdot 5 \cdot 11 = 220 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 220 \text{ m}^3$$

5 Halla la máxima distancia que se puede trazar en línea recta en un ortoedro cuyas dimensiones son 3 m x 5 m x 8 m.

- a. 7,54 m b. 9,90 m c. 1,20 m d. 14,39 m

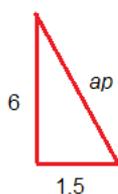
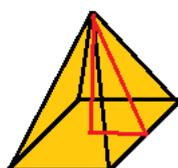
$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow D = \sqrt{3^2 + 5^2 + 8^2} = \sqrt{98} = 9,9$$

$$D = 9,9 \text{ m}$$

6 El área de una pirámide cuadrangular de 6 m de altura y cuya base tiene una arista de 3 m vale:

- a. 89,72 m² b. 46,11 m² c. 75,23 m² d. 42,65 m²

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide:



$$ap^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow ap = \sqrt{6^2 + 1,5^2} \Rightarrow ap = \sqrt{36 + 2,25} = \sqrt{38,25} = 6,18 \text{ m}$$

$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1,5 + 6,18}{2} = 46,08 \Rightarrow A_{\text{total}} = 46,08 \text{ m}^2$$

- 7 El volumen, en metros cúbicos, de una pirámide heptagonal de 6 m de altura y cuya base tiene una arista de 3 m y una apotema de 2 m es:**

- a. 40 m³ b. 65 m³ c. 42 m³ d. 62 m³

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{2} \cdot 6 = 42 \text{ m}^3$$

- 8 Calcula el volumen que queda entre un cubo de 5 m de arista y una pirámide inscrita en él cuya base coincide con una de las caras del cubo.**

- a. 125 m³ b. 25,27 m³ c. 83,33 m³ d. 72,36 m³

$$V_{\text{total}} = V_{\text{cubo}} - V_{\text{pirámide cuadrangular}}$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 5^3 = 125 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{pirámide cuadrangular}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} \Rightarrow V_{\text{pirámide cuadrangular}} = \frac{5^2 \cdot 5}{3} = 41,67$$

$$V_{\text{pirámide cuadrangular}} = 41,67 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{total}} = 125 - 41,67 = 83,33 \text{ m}^3$$