MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

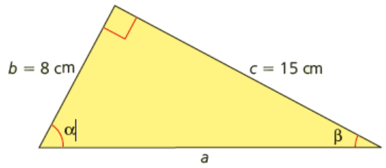
Unidad 8. Resolución de triángulos

Unidad 8. Resolución de triángulos

SOLUCIONES PÁG. 177

1 Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:

a.



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa:

$a=\sqrt{b^2+c^2} \Rightarrow a=\sqrt{8^2+15^2}=17 \Rightarrow a=17$ cm

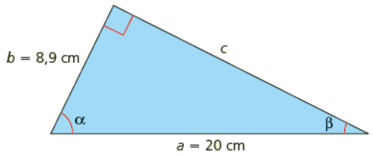
Se halla el ángulo α:

$$\text{sen}\ \alpha=\frac{c}{a} \Rightarrow \alpha=\text{arcsen}\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow \alpha=\text{arcsen}\left(\frac{15}{17}\right) \Rightarrow \alpha=61{,}93^{\text{o}}$$

Se halla el otro ángulo:

$\beta = 90° - 61{,}93° = 28{,}07° \Rightarrow \beta = 28{,}07°$

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el otro cateto:

$c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{20^2-8{,}9^2}=\sqrt{320{,}79}=17{,}91 \Rightarrow a=17{,}91$ cm

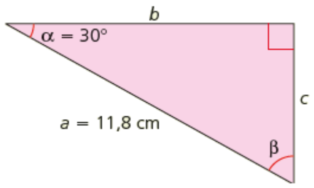
Se halla el ángulo β:

$$\text{sen}\ \beta=\frac{b}{a} \Rightarrow \beta=\text{arcsen}\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \beta=\text{arcsen}\left(\frac{8{,}9}{20}\right) \Rightarrow \beta=26{,}42^{\text{o}}$$

Se halla el otro ángulo:

$\alpha = 90° - 26{,}42° = 63{,}58°$

c.



Se halla el ángulo β:

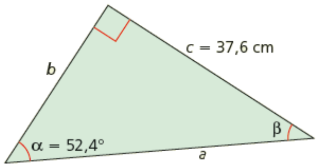
$\beta = 90° - 30^{\text{o}} = 60^{\text{o}} \Rightarrow \beta = 60^{\text{o}}$

Se hallan los catetos:

$$\text{sen}\ 30^{\text{o}}=\frac{c}{11{,}8} \Rightarrow c=11{,}8\cdot \text{sen}\ 30^{\text{o}}=5{,}9 \Rightarrow c=5{,}9 \text{ cm}$$

$$\cos 30^{\text{o}}=\frac{b}{11{,}8} \Rightarrow b=11{,}8\cdot \cos 30^{\text{o}}=10{,}22 \Rightarrow b=10{,}22 \text{ cm}$$

d.



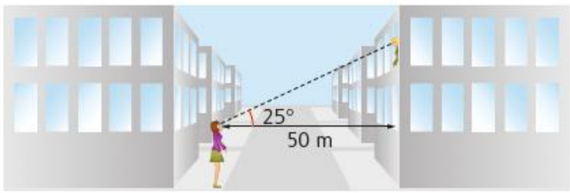
Se halla el ángulo β:
β = 90° – 52,4º = 37,6º ⇒ β = 37,6º
Se halla la hipotenusa:

$$\cos 37{,}6^{o} = \frac{37{,}6}{a} \Rightarrow a = \frac{37{,}6}{\cos 37{,}6^{o}} = 47{,}46 \Rightarrow a = 47{,}46 \text{ cm}$$

Se halla el otro cateto:

$$\cos 52{,}4^{o} = \frac{b}{47{,}59} \Rightarrow b = 47{,}59 \cdot \cos 52{,}4^{o} = 28{,}96 \Rightarrow b = 28{,}96 \text{ cm}$$

2 **Ana está en la calle mirando hacia la ventana de María. Teniendo en cuenta que la ve con un ángulo de 25° y que se encuentra a 50 m del bloque de pisos donde vive su amiga, contesta a las siguientes preguntas:**

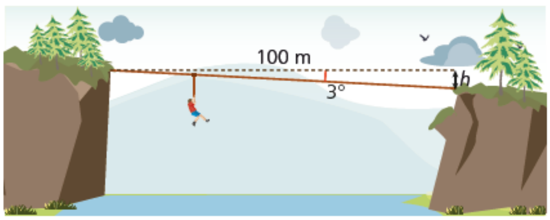


a. ¿Con qué ángulo ve María a Ana?
β = 90º – 25º = 65º
El ángulo con el que ve María a Ana es de 65°.

b. ¿A qué altura está la ventana de María?

$$\text{tg } 25^{o} = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 50 \cdot \text{tg } 25^{o} = 23{,}5 \Rightarrow h = 23{,}32 \text{ cm}$$

3 **Un equipo de multiaventura monta una tirolina que une los dos extremos de un desfiladero. La altura a un lado del desfiladero con respecto al otro difiere en 3° en relación con la horizontal, como se indica en el dibujo. Si hay 100 m de distancia entre los extremos del desfiladero, calcula la longitud de la tirolina y la diferencia de altura que hay entre un extremo del desfiladero y el otro.**

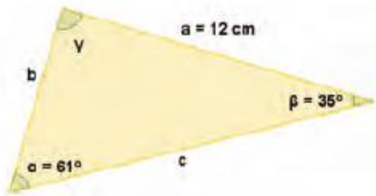


$\cos 3^{o} = \dfrac{100}{d} \Rightarrow d = \dfrac{100}{\cos 3^{o}} = 100{,}14 \text{ m}$. La longitud de la tirolina es de 100,14 m.

$\text{tg } 3^{o} = \dfrac{h}{100} \Rightarrow h = 100 \cdot \text{tg } 3^{o} = 5{,}24 \Rightarrow h = 5{,}24 \text{ m}$. La diferencia de altura entre un extremo y otro es de 5,24 m.

SOLUCIONES PÁG 179

4 Resuelve el triángulo que tiene dos ángulos de 35° y 61°, respectivamente, y en el que el lado opuesto al ángulo de 61° mide 12 cm.

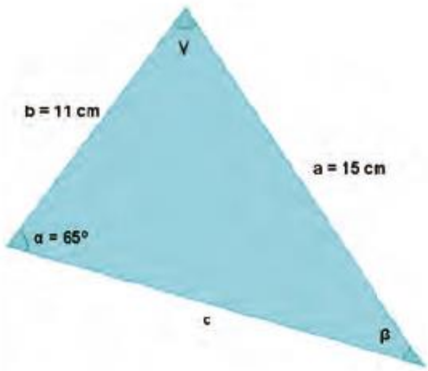


$$\gamma = 180^\circ - (35^\circ + 61^\circ) = 84^\circ$$

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \frac{12}{\text{sen } 61^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 35^\circ} \Rightarrow b = \frac{12 \cdot \text{sen } 35^\circ}{\text{sen } 61^\circ} = 7{,}72 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} \Rightarrow \frac{12}{\text{sen } 61^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 84^\circ} \Rightarrow c = \frac{12 \cdot \text{sen } 84^\circ}{\text{sen } 61^\circ} = 11{,}93 \text{ cm}$$

5 Calcula el área y el perímetro de un triángulo dos de cuyos lados miden 11 cm y 15 cm, respectivamente, y en el que el ángulo opuesto al lado de 15 cm mide 65°.



$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \frac{15}{\text{sen } 65^\circ} = \frac{11}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{11 \cdot \text{sen } 65^\circ}{15} \Rightarrow \beta = 41{,}65^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (65^\circ + 41{,}65^\circ) = 73{,}35^\circ$$

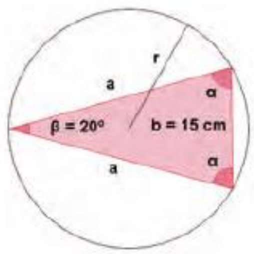
$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} \Rightarrow \frac{15}{\text{sen } 65^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 73{,}35^\circ} \Rightarrow c = \frac{15 \cdot \text{sen } 73{,}35^\circ}{\text{sen } 65^\circ} = 15{,}86 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = d = 2r \Rightarrow r = \frac{a}{2 \cdot \text{sen } \alpha} = \frac{15}{2 \cdot \text{sen } 65^\circ} = 8{,}28 \text{ cm}$$

$$P = a + b + c = 15 + 11 + 15{,}86 = 41{,}86 \text{ cm}$$

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r} = \frac{15 \cdot 11 \cdot 15{,}86}{4 \cdot 8{,}28} = 79{,}01 \text{ cm}^2$$

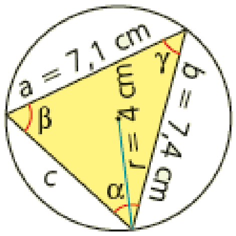
6 Halla la longitud de una circunferencia circunscrita a un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 15 cm y en el que el ángulo opuesto a dicho lado vale 20°.



$$\frac{a}{\text{sen }\alpha}=\frac{b}{\text{sen }\beta}=\frac{c}{\text{sen }\gamma}=d\Rightarrow d=\frac{b}{\text{sen }\beta}=\frac{15}{\text{sen }20^{\circ}}=43{,}86\text{ cm}\Rightarrow d=43{,}86\text{ cm}$$

$$L=\pi d=\pi\cdot 43{,}86=137{,}79\text{ cm}$$

7 Una circunferencia de 4 cm de radio tiene inscrito un triángulo dos de cuyos lados miden 7,1 cm y 7,4 cm, respectivamente.



a. ¿Cuánto miden los elementos desconocidos del triángulo?

Se halla el ángulo α con el teorema del seno:

$$2r=\frac{a}{\text{sen }\alpha}\Rightarrow 2\cdot 4=\frac{7{,}1}{\text{sen }\alpha}\Rightarrow \text{sen }\alpha=\frac{7{,}1}{8}\Rightarrow \alpha=62{,}56^{\circ}$$

Se halla el ángulo β con el teorema del seno:

$$2r=\frac{b}{\text{sen }\beta}\Rightarrow 2\cdot 4=\frac{7{,}4}{\text{sen }\beta}\Rightarrow \text{sen }\beta=\frac{7{,}4}{8}\Rightarrow \beta=67{,}67^{\circ}$$

Se calcula el ángulo que queda:

$$\gamma=180^{\circ}-\left(62{,}56^{\circ}+67{,}67^{\circ}\right)=49{,}77^{\circ}$$

Se halla el lado *c* con el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen }\alpha}=\frac{c}{\text{sen }\gamma}\Rightarrow\frac{7{,}1}{\text{sen }62{,}56^{\circ}}=\frac{c}{\text{sen }49{,}77^{\circ}}\Rightarrow c=\frac{7{,}1\cdot\text{sen }49{,}77^{\circ}}{\text{sen }62{,}56^{\circ}}=6{,}11\text{cm}$$

b. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

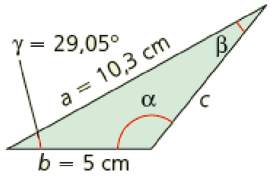
$$P=a+b+c=7{,}1+7{,}4+6{,}11=20{,}61\text{cm}$$

$$A=\frac{a\cdot b\cdot c}{4r}=\frac{7{,}1\cdot 7{,}4\cdot 6{,}11}{4\cdot 4}=20{,}06\text{ cm}^2$$

SOLUCIONES PÁG. 181

8 Resuelve los siguientes triángulos:

a.



Se aplica el teorema del coseno para hallar el lado *c:*

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow c^2 = 10,3^2 + 5^2 - 2 \cdot 10,3 \cdot 5 \cdot \cos 29,05° \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \sqrt{41,05} = 6,41 \Rightarrow c = 6,41$ cm

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo β:

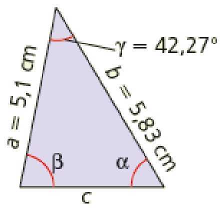
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \Rightarrow 5^2 = 10,3^2 + 6,41^2 - 2 \cdot 10,3 \cdot 6,41 \cdot \cos\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{5^2 - 10,3^2 - 6,41^2}{-2 \cdot 10,3 \cdot 6,41} \Rightarrow \beta = 22,29°$$

Se halla el otro ángulo:

$\alpha = 180° - (29,05° + 22,29°) = 128,66°$

b.



Se aplica el teorema del coseno para hallar el lado *c:*

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow c^2 = 5,1^2 + 5,83^2 - 2 \cdot 5,1 \cdot 5,83 \cdot \cos 42,27° \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \sqrt{15,99} = 4 \Rightarrow c = 4$ cm

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo β:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \Rightarrow 5,83^2 = 5,1^2 + 4^2 - 2 \cdot 5,1 \cdot 4 \cdot \cos\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 33,99 = 42,01 - 40,8 \cdot \cos\beta \Rightarrow \beta = 78,66°$

Se halla el otro ángulo:

$\alpha = 180° - (78,7° + 42,27°) = 59,03°$

9 Indica, mediante el teorema de Pitágoras generalizado, qué tipo de triángulos son los siguientes según sus ángulos:

a. Triángulo cuyos lados miden 4,92 cm, 7 cm y 9,9 cm.

Se utiliza el teorema de Pitágoras generalizando:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 9,9^2 = 98,01 \text{cm}^2 \\ b^2 + c^2 = 4,92^2 + 7^2 = 73,21 \text{cm}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Triángulo obtusángulo.

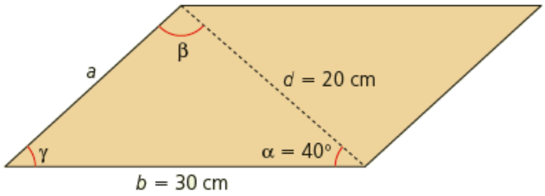
b. Triángulo cuyos lados miden 8,6 cm, 9,62 cm y 5,83 cm.

Se utiliza el teorema de Pitágoras generalizando:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 9,62^2 = 92,54\ \text{cm}^2 \\ b^2 + c^2 = 8,6^2 + 5,83^2 = 107,95\ \text{cm}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

Triángulo acutángulo.

10 Considera el romboide de la figura.



a. ¿Cuál es su perímetro?

Se aplica el teorema del coseno para hallar el lado *a:*

$$a^2 = b^2 + d^2 - 2bd \cdot \cos\alpha \Rightarrow a^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos 40^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{380,75} = 19,51 \Rightarrow a = 19,51\ \text{cm}$$

El perímetro es:

$$P = 2a + 2b = 2 \cdot 19,51 + 2 \cdot 30 = 99,02\ \text{cm}$$

b. ¿Cuánto miden sus ángulos?

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo β:

$$b^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\beta \Rightarrow 30^2 = 19,51^2 + 20^2 - 2 \cdot 19,51 \cdot 20 \cdot \cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 900 = 780,64 - 780,4 \cdot \cos\beta \Rightarrow \beta = 98,80^\circ$$

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo γ:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow 20^2 = 19,51^2 + 30^2 - 2 \cdot 19,51 \cdot 30 \cdot \cos\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 = 1280,64 - 1170,6 \cdot \cos\gamma \Rightarrow \gamma = 41,21^\circ$$

Los ángulos del romboide son γ = 41,21º y α + β = 138,8º.

11 Un triángulo tiene un ángulo de 50°, y los lados que forman dicho ángulo miden 12 cm y 16 cm, respectivamente. ¿Cuánto miden los ángulos y el lado restante?

Se aplica el teorema de coseno para hallar el otro lado:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow c^2 = 12^2 + 16^2 - 2 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \cos 50^\circ = 153,17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{153,17} = 12,38\ \text{cm}$$

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo α:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow 12^2 = 16^2 + 12,38^2 - 2 \cdot 16 \cdot 12,38 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 144 = 409,26 - 396,16 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 47,96^\circ$$

Se halla el otro ángulo:

$$\beta = 180^\circ - (50^\circ + 47,95^\circ) = 82,05^\circ$$

SOLUCIONES PÁG 183

12 Calcula los ángulos de los triángulos que tienen los siguientes lados:

a. ***a*** **= 3,48 cm,** ***b*** **= 3,03 cm,** ***c*** **= 4,41 cm**

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo α:

$$\alpha = \arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \arccos\frac{3{,}03^2+4{,}41^2-3{,}48^2}{2\cdot 3{,}03\cdot 4{,}41} = 51{,}82º \Rightarrow \alpha = 51{,}82º$$

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo β:

$$\beta = \arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \arccos\frac{3{,}48^2+4{,}41^2-3{,}03^2}{2\cdot 3{,}48\cdot 4{,}41} = 43{,}19º \Rightarrow \beta = 43{,}19º$$

Se halla el otro ángulo:

$$\gamma = 180º - (\alpha+\beta) = 180º - (51{,}82º + 43{,}19º) = 84{,}99º$$

b. ***a*** **= 2,67 cm,** ***b*** **= 5,77 cm,** ***c*** **= 3,98 cm**

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo α:

$$\alpha = \arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \arccos\frac{5{,}77^2+3{,}98^2-2{,}67^2}{2\cdot 5{,}77\cdot 3{,}98} = 23{,}86º \Rightarrow \alpha = 23{,}86º$$

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo β:

$$\beta = \arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \arccos\frac{2{,}67^2+3{,}98^2-5{,}77^2}{2\cdot 2{,}67\cdot 3{,}98} = 119{,}06º \Rightarrow \beta = 119{,}06º$$

Se halla el otro ángulo:

$$\gamma = 180º - (\alpha+\beta) = 180º - (23{,}86º + 119{,}06º) = 37{,}08º$$

c. ***a*** **= 2,73 cm,** ***b*** **= 2,6 cm,** ***c*** **= 1,43 cm**

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo α:

$$\alpha = \arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \arccos\frac{1{,}43^2+2{,}6^2-2{,}73^2}{2\cdot 1{,}43\cdot 2{,}6} = 79{,}52º \Rightarrow \alpha = 79{,}52º$$

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo β:

$$\beta = \arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \arccos\frac{2{,}73^2+2{,}6^2-1{,}43^2}{2\cdot 2{,}73\cdot 2{,}6} = 31º \Rightarrow \beta = 31º$$

Se halla el otro ángulo:

$$\gamma = 180º - (\alpha+\beta) = 180º - (79{,}52º + 31º) = 69{,}48º$$

d. ***a*** **= 1,67 cm,** ***b*** **= 4,56 cm,** ***c*** **= 3,08 cm**

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo α:

$$\alpha = \arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \arccos\frac{4{,}56^2+3{,}08^2-1{,}67^2}{2\cdot 4{,}56\cdot 3{,}08} = 11{,}85º \Rightarrow \alpha = 11{,}85º$$

Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo β:

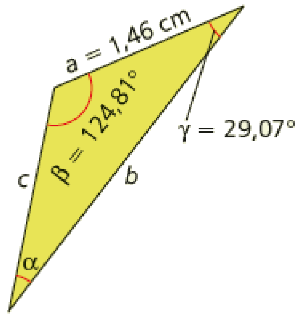
$$\beta = \arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \arccos\frac{1{,}67^2+3{,}08^2-4{,}56^2}{2\cdot 1{,}67\cdot 3{,}08} = 145{,}9º \Rightarrow \beta = 145{,}9º$$

Se halla el otro ángulo:

$$\gamma = 180º - (\alpha+\beta) = 180º - (11{,}85º + 145{,}9º) = 22{,}25º$$

13 Halla los datos desconocidos de los siguientes triángulos, de los que se conoce un lado y dos ángulos:

a.



Se halla el otro ángulo:

$$\alpha = 180^{o} - (\gamma + \beta) = 180^{o} - (29{,}07^{o} + 124{,}81^{o}) = 26{,}12^{o}$$

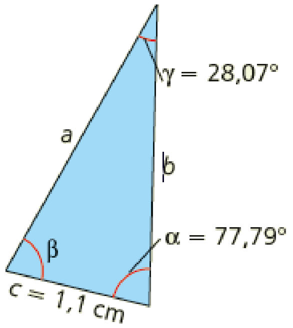
Se aplica el teorema del seno para hallar el lado *b:*

$$b = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } \alpha} = \frac{1{,}46 \cdot \text{sen } 124{,}81^{o}}{\text{sen } 26{,}12^{o}} = 2{,}72 \text{ cm}$$

Se aplica el teorema del seno para hallar el lado *c:*

$$c = \frac{a \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} = \frac{1{,}46 \cdot \text{sen } 29{,}07^{o}}{\text{sen } 26{,}12^{o}} = 1{,}61 \text{ cm}$$

b.



Se halla el otro ángulo:

$$\beta = 180^{o} - (\gamma + \alpha) = 180^{o} - (28{,}07^{o} + 77{,}79^{o}) = 74{,}14^{o}$$

Se aplica el teorema del seno para hallar el lado *a:*

$$a = \frac{c \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} = \frac{1{,}1 \cdot \text{sen } 77{,}79^{o}}{\text{sen } 28{,}07^{o}} = 2{,}28 \text{ cm}$$

Se aplica el teorema del seno para hallar el lado *b:*

$$b = \frac{c \text{ sen } \beta}{\text{sen } \gamma} = \frac{1{,}1 \cdot \text{sen } 74{,}14^{o}}{\text{sen } 28{,}07^{o}} = 2{,}25 \text{ cm}$$

14 Actividad resuelta.

15 Halla los ángulos y/o los lados desconocidos de los triángulos que tienen los siguientes elementos:

a. ***a*** **= 1,61 cm,** ***b*** **= 1,99 cm, y el ángulo comprendido entre ambos: γ = 56,17°**

Se aplica el teorema del coseno para hallar el lado *c:*

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}=\sqrt{1{,}61^2+1{,}99^2-2\cdot1{,}61\cdot1{,}99\cdot\cos56{,}17^{\circ}}=1{,}73\text{ cm}$$

Se aplica el teorema del seno para hallar el ángulo β:

$$\beta=\text{arcsen}\frac{b\cdot\text{sen}\,\gamma}{c}=\text{arcsen}\frac{1{,}99\cdot\text{sen}\,56{,}17^{\circ}}{1{,}73}=72{,}85^{\circ}$$

Se halla el otro ángulo:

$$\gamma=180^{\circ}-\left(56{,}17^{\circ}+72{,}85^{\circ}\right)=50{,}98^{\circ}$$

b. ***b*** **= 2,93 cm,** ***c*** **= 1,96 cm, y el ángulo opuesto al lado c: γ = 3,98 cm**

Se aplica el teorema del seno para hallar el ángulo β:

$$\beta=\text{arcsen}\frac{b\cdot\text{sen}\,\gamma}{c}=\text{arcsen}\frac{2{,}93\cdot\text{sen}\,41{,}08^{\circ}}{1{,}96}=79{,}21^{\circ}$$

Se halla el otro ángulo:

$$\alpha=180^{\circ}-\left(\gamma+\beta\right)=180^{\circ}-\left(41{,}08^{\circ}+79{,}21^{\circ}\right)=59{,}71^{\circ}$$

Se aplica el teorema del coseno para hallar el lado *a:*

$$a=\frac{c\ \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\gamma}=\frac{1{,}96\cdot\text{sen}\,59{,}71^{\circ}}{\text{sen}\,41{,}08^{\circ}}=2{,}58\text{ cm}$$

c. ***a*** **= 1,92 cm,** ***c*** **= 3,1 cm, y el ángulo comprendido entre ambos: β = 39,72°**

Se aplica el teorema del coseno para hallar el lado *b:*

$$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta}=\sqrt{1{,}92^2+3{,}1^2-2\cdot1{,}92\cdot3{,}1\cdot\cos39{,}72^{\circ}}=2{,}03\text{ cm}$$

Se aplica el teorema del seno para hallar el ángulo α:

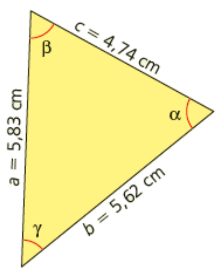
$$\alpha=\text{arcsen}\frac{a\cdot\text{sen}\,\beta}{b}=\text{arcsen}\frac{1{,}92\cdot\text{sen}\,39{,}72^{\circ}}{2{,}03}=37{,}19^{\circ}$$

Se calcula el otro ángulo:

$$\gamma=180^{\circ}-\left(37{,}19^{\circ}+39{,}72^{\circ}\right)=103{,}09^{\circ}$$

16 Resuelve los siguientes triángulos aplicando los teoremas estudiados anteriormente:

a.



Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo α:

$$\alpha=\text{arc}\cos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\text{arc}\cos\frac{5{,}62^2+4{,}74^2-5{,}83^2}{2\cdot5{,}62\cdot4{,}74}=67{,}88^{\circ}$$

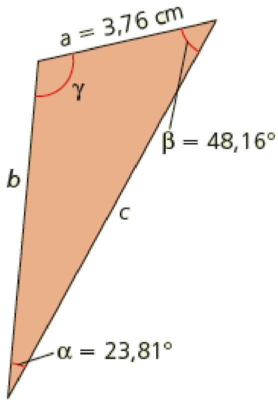
Se aplica el teorema del coseno para hallar el ángulo β:

$$\beta = \arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \arccos\frac{5,83^2+4,74^2-5,62^2}{2\cdot 5,83\cdot 4,74} = 63,25^\circ$$

Se halla el otro ángulo:

$$\gamma = 180^\circ-(\alpha+\beta) = 180^\circ-(67,88^\circ+63,25^\circ) = 48,87^\circ$$

b.

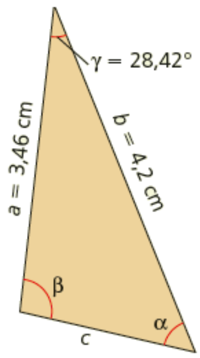


$$\gamma = 180^\circ-(\alpha+\beta) = 180^\circ-(23,81^\circ+48,16^\circ) = 108,03^\circ$$

$$b = \frac{a\ \text{sen}\ \beta}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{3,76\cdot \text{sen}\ 48,16^\circ}{\text{sen}\ 23,81^\circ} = 6,94\ \text{cm}$$

$$c = \frac{a\ \text{sen}\ \gamma}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{3,76\cdot \text{sen}\ 108,03^\circ}{\text{sen}\ 23,81^\circ} = 8,86\ \text{cm}$$

c.

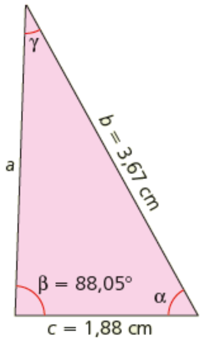


$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma} = \sqrt{3,46^2+4,2^2-2\cdot 3,46\cdot 4,2\cdot\cos 28,42^\circ} = 2,01\,\text{cm}$$

$$\beta = \text{arcsen}\frac{b\cdot \text{sen}\ \gamma}{c} = \text{arcsen}\frac{4,2\cdot \text{sen}\ 28,42^\circ}{2,01} = 83,98^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ-(28,42^\circ+83,98^\circ) = 67,6^\circ$$

d.



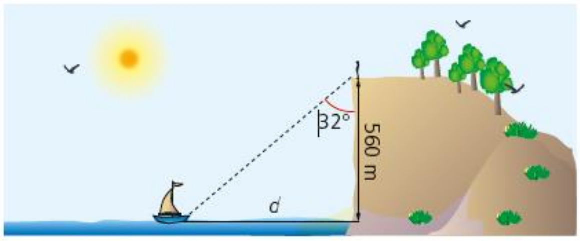
$$\gamma = \text{arcsen}\frac{c \cdot \text{sen}\,\beta}{b} = \text{arcsen}\frac{1{,}88 \cdot \text{sen}\,88{,}05^\circ}{3{,}67} = 30{,}79^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - (\gamma + \beta) = 180^\circ - (30{,}79^\circ + 88{,}05^\circ) = 61{,}16^\circ$$

$$a = \frac{b\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = \frac{3{,}67 \cdot \text{sen}\,61{,}16^\circ}{\text{sen}\,88{,}05^\circ} = 3{,}22\text{ cm}$$

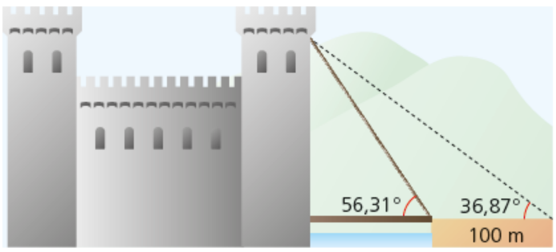
SOLUCIONES PÁG. 185

17 Una persona está en lo alto de un acantilado, que se alza 560 m sobre el nivel del mar. Desde allí visualiza un velero bajo un ángulo de 32°. ¿A qué distancia se encuentra el barco del acantilado?



$$\text{tg}\,32^\circ = \frac{d}{560} \Rightarrow d = 560 \cdot \text{tg}\,32^\circ = 349{,}93\text{ m}$$

18 Un castillo está rodeado por un foso con agua. Una persona situada en el borde del foso ve la parte alta del castillo con un ángulo de 56,31°, mientras que, si se separa 100 m del foso, el ángulo pasa a ser de 36,87°.
¿Qué longitud tiene que tener el puente del portón de entrada para sortear dicho foso?



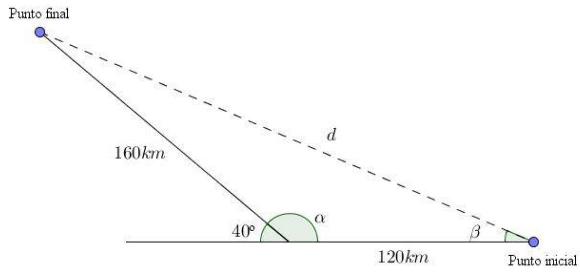
$$\beta = 180^\circ - 56{,}31^\circ = 123{,}69^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - (123{,}69^\circ + 36{,}87^\circ) = 19{,}44^\circ$$

$$\frac{a}{\text{sen}\,36{,}87^\circ} = \frac{100}{\text{sen}\,19{,}44^\circ} \Rightarrow a = \frac{100 \cdot \text{sen}\,36{,}87^\circ}{\text{sen}\,19{,}44^\circ} = 180{,}28\text{ m}$$

$$\cos 56{,}31^\circ = \frac{d}{a} \Rightarrow d = 180{,}28 \cdot \cos 56{,}31^\circ = 100\text{ m}$$

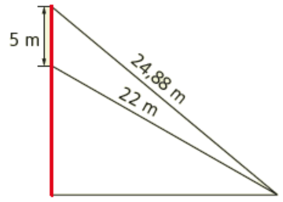
19 Un barco navega 120 km hacia el oeste y luego 160 km hacia el noroeste con un ángulo de 40°. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?



$$\alpha = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$d = \sqrt{160^2 + 120^2 - 2 \cdot 160 \cdot 120 \cos 140^\circ} = 263{,}47\ km$$

20 Dos cables fijados al suelo están sujetos a sendos puntos de un poste: uno en el extremo superior del poste y otro situado 5 m más abajo. Los cables miden 24,88 m y 22 m, respectivamente. ¿Cuál es la altura del poste?

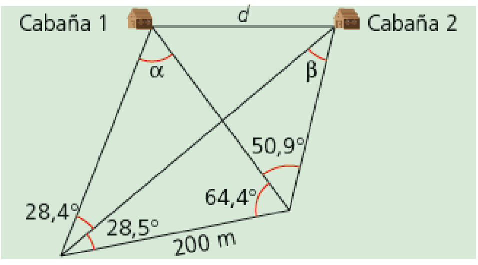


$$22^2 = 5^2 + 24{,}88^2 - 2 \cdot 5 \cdot 24{,}88 \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 49{,}97^\circ$$

$$\cos 49{,}97^\circ = \frac{h}{24{,}88} \Rightarrow h = 16\text{ m}$$

El poste tiene 16 metros.

21 Calcula la distancia que hay entre dos cabañas situadas a un lado de un acantilado a partir de los siguientes ángulos tomados desde el otro lado del acantilado:



$$\alpha = 180^\circ - (56{,}9^\circ + 64{,}4^\circ) = 58{,}7^\circ \quad \beta = 180^\circ - (28{,}5^\circ + 115{,}3^\circ) = 36{,}2^\circ$$

$$\frac{a}{\text{sen } 64,4^{\circ}} = \frac{200}{\text{sen } 58,7^{\circ}} \Rightarrow a = 211,09 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\text{sen } 115,3^{\circ}} = \frac{200}{\text{sen } 36,2^{\circ}} \Rightarrow b = 306,15 \text{ m}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 28,4^{\circ}} =$$

$$= \sqrt{211,09^2 + 306,15^2 - 2 \cdot 211,09 \cdot 306,15 \cdot \cos 28,4^{\circ}} = 156,86 \text{ m}$$

SOLUCIONES PÁG. 187

1 ¿Qué utilizarías para resolver un triángulo rectángulo conociendo dos de sus lados?

Con ayuda de las razones trigonométricas (seno, coseno o tangente) se hallan el resto de ángulos.
El otro lado se hallaría o con el teorema de Pitágoras o con razones trigonométricas.

2 ¿Qué utilizarías para resolver un triángulo rectángulo conociendo dos de sus lados?

El otro ángulo se hallaría restando el conocido a 90º. Con las razones trigonométricas se calcularían los lados que faltan.

3 Contesta a las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántos elementos de un triángulo debes conocer como mínimo para resolverlo?
Se debe conocer como mínimo tres datos.

b. ¿Y si se trata de un triángulo rectángulo? ¿Por qué?
Solo dos, ya que se sabe que un ángulo mide 90º.

4 ¿Qué relación existe entre los elementos de un triángulo y su circunferencia circunscrita?

La razón entre uno cualquiera de los lados de un triángulo y el seno de su ángulo opuesto (teorema del seno) es igual al diámetro de su circunferencia circunscrita.

5 Indica cómo saber si un triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo a partir de la longitud de sus lados.

Mediante el teorema del coseno, si *a, b* y *c* son los lados del triángulo,
siendo *a* el lado mayor:
• Si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.
• Si $a^2 < b^2 + c^2$, el triángulo es acutángulo.
• Si $a^2 > b^2 + c^2$, el triángulo es obtusángulo.

6 Indica cómo hallar los elementos desconocidos de un triángulo del que conocemos:

a. Sus tres lados.
Mediante el teorema del coseno y mediante la relación que indica que los ángulos de un triángulo suman 180º, se hallan los ángulos desconocidos.

b. Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
Mediante el teorema del coseno, se halla el lado que falta. Los ángulos que faltan se hallan por el teorema del seno o el del coseno y/o con la suma de los ángulos igualada a 180º.

c. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
Con el teorema del seno se halla el ángulo opuesto al otro lado, y el ángulo restante con la relación de la suma de los ángulos de un triángulo. El otro lado se halla con el teorema del seno o el del coseno.

7 Prepara una presentación digital para tus compañeros sobre posibles aplicaciones de la resolución de triángulos. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 188 - REPASO FINAL

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1 Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:

a. Sus lados miden 20 cm, 21 cm y 29 cm.

$$\alpha = \text{arcsen}\frac{20}{29} = 43,6º$$

$$\beta = 90º - 43,6º = 46,4º$$

b. Tiene un cateto de 3 cm y un ángulo de 20º.

$$\beta = 90º - 20º = 70º$$

Solución 1: se considera que el lado de 3 cm es el opuesto al ángulo de 20º y se calcula la hipotenusa:

$$\text{sen } 20º = \frac{3}{a} \Rightarrow a = \frac{3}{\text{sen } 20º} = 8,77 \text{ cm}$$

Se halla el otro cateto utilizando el teorema Pitágoras:

$$c = \sqrt{8,77^2 - 3^2} = 8,24 \text{ cm}$$

Solución 2: Se considera que el lado de 3 cm es el opuesto al ángulo de 70º y se calcula la hipotenusa:

$$\text{sen } 70º = \frac{3}{a} \Rightarrow a = \frac{3}{\text{sen } 70º} = 3,19 \text{ cm}$$

Se halla el otro cateto utilizando el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{3,19^2 - 3^2} = 1,08 \text{ cm}$$

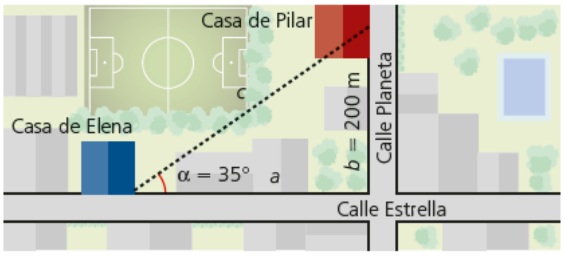
c. Tiene una hipotenusa de 10 cm y un ángulo de 50º.

$$\beta = 90º - 50º = 40º$$

$$\text{sen } 50º = \frac{b}{10} \Rightarrow b = 10 \cdot \text{sen } 50º = 7,66 \text{ cm}$$

$$c = \sqrt{10^2 - 7,66^2} = 6,43 \text{ cm}$$

2 Elena vive en la calle Estrella, y Pilar, en la calle Planeta. Las dos calles tienen una disposición perpendicular, como puede verse en la figura.



a. ¿Cuántos metros debe recorrer Elena para llegar a casa de Pilar?

$$\text{sen } 35^{\circ} = \frac{200}{c} \Rightarrow c = \frac{200}{\text{sen } 35^{\circ}} = 348{,}69 \text{ m}$$

$$a = \sqrt{348{,}69^2 - 200^2} = 285{,}63 \text{ m}$$

285,63 + 200 = 485,63 m recorrería Elena para llegar a casa de Pilar.

b. ¿Cuántos recorrería si pudiera ir en línea recta de su casa a la de su amiga?

Si fuera en línea recta recorrería 348,69 m

c. ¿Cuánto tiempo tardaría en ambos casos si caminase a una velocidad de 5 km/h?

En el primer caso, tardaría:

$$485{,}63 \text{ m} \frac{1 \text{ h}}{5\,000 \text{ m}} = 0{,}097\,126 \text{ h} = 5 \text{ min } 49{,}65 \text{ s}$$

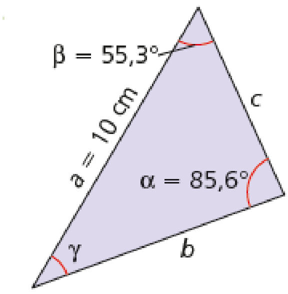
Y en el segundo caso:

$$348{,}69 \text{ m} \frac{1 \text{ h}}{5\,000 \text{ m}} = 0{,}069\,738 \text{ h} = 4 \text{ min } 11{,}06 \text{ s}$$

TEOREMA DEL SENO

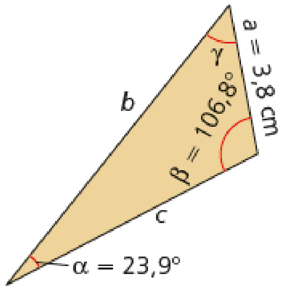
3 Halla la longitud del lado *b* en los siguientes triángulos:

a.



$$\frac{10}{\text{sen } 85{,}6^{\circ}} = \frac{b}{\text{sen } 55{,}3^{\circ}} \Rightarrow b = \frac{10 \cdot \text{sen } 55{,}3^{\circ}}{\text{sen } 85{,}6^{\circ}} = 8{,}25 \text{ cm}$$

b.



$$\frac{3,8}{\text{sen } 23,9^o} = \frac{b}{\text{sen } 106,8^o} \Rightarrow b = \frac{3,8 \cdot \text{sen } 106,8^o}{\text{sen } 23,9^o} = 8,98 \text{ cm}$$

4 Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo que tiene un lado de 12 cm cuyo ángulo opuesto tiene una apertura de 75º.

$$\frac{12}{\text{sen } 75^o} = 2r \Rightarrow r = \frac{12}{2 \cdot \text{sen } 75^o} = 6,21 \text{cm}$$

5 El radio de la circunferencia circunscrita de un triángulo mide 6 cm.

a. ¿Cuánto miden sus lados si el ángulo opuesto a uno de ellos es de 25º y otro de los ángulos mide 40º?

$$\gamma = 180^o - (25^o + 40^o) = 115^o$$

$$\frac{a}{\text{sen } 25^o} = 2 \cdot 6 \Rightarrow a = 12 \cdot \text{ sen } 25^o = 5,07 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\text{sen } 40^o} = 12 \Rightarrow b = 12 \cdot \text{ sen } 40^o = 7,71 \text{cm}$$

$$\frac{c}{\text{sen } 115^o} = 12 \Rightarrow c = 12 \cdot \text{sen } 115^o = 10,88 \text{ cm}$$

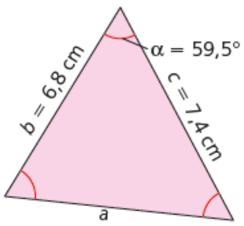
b. ¿Y qué apertura tiene el otro ángulo?

115º

TEOREMA DEL COSENO

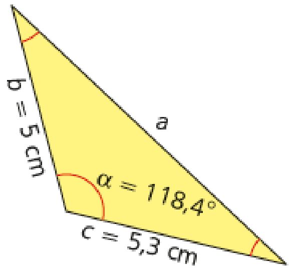
6 Calcula la longitud del lado *a* en los siguientes triángulos:

a.



$$a = \sqrt{6,8^2 + 7,4^2 - 2 \cdot 6,8 \cdot 7,4 \cdot \cos 59,5^o} = 7,07 \text{ cm}$$

b.



$a = \sqrt{5^2 + 5{,}3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5{,}3 \cdot \cos 118{,}4^\circ} = 8{,}85 \text{ cm}$

7 Indica cómo son según sus ángulos los triángulos que tienen los siguientes lados:

a. *a* = 5 cm, *b* = 16 cm y *c* = 15 cm

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = 16^2 = 256 \text{ cm}^2 \\ a^2 + c^2 = 5^2 + 15^2 = 250 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 > a^2 + c^2$$

Por tanto, el triángulo es obtusángulo.

b. *a* = 22 cm, *b* = 20 cm y *c* = 26 cm

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = 26^2 = 676 \text{ cm}^2 \\ a^2 + b^2 = 22^2 + 20^2 = 884 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2$$

Por tanto, el triángulo es acutángulo.

c. *a* = 77 cm, *b* = 85 cm y *c* = 36 cm

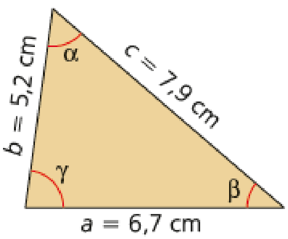
$$\left.\begin{array}{l} b^2 = 85^2 = 7225 \text{ cm}^2 \\ a^2 + c^2 = 77^2 + 36^2 = 7225 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$$

Por tanto, el triángulo es rectángulo.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

8 Resuelve estos triángulos:

a.

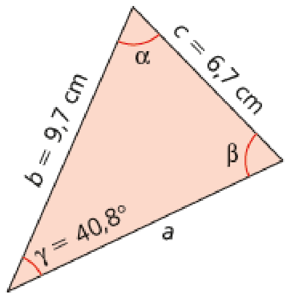


$$6{,}7^2 = 5{,}2^2 + 7{,}9^2 - 2 \cdot 5{,}2 \cdot 7{,}9 \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{89{,}45 - 44{,}89}{82{,}16} \Rightarrow \alpha = 57{,}16^\circ$$

$$5{,}2^2 = 6{,}7^2 + 7{,}9^2 - 2 \cdot 6{,}7 \cdot 7{,}9 \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{107{,}3 - 27{,}04}{105{,}86} \Rightarrow \beta = 40{,}7^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \left(57{,}16^\circ + 40{,}7^\circ\right) = 82{,}14^\circ$$

b.

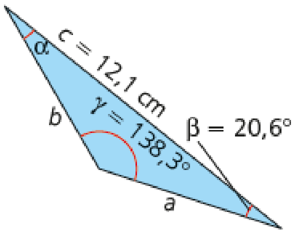


$$\frac{9,7}{\text{sen }\beta}=\frac{6,7}{\text{sen }40,8^{o}}\Rightarrow \beta=\text{arcsen}\frac{9,7\cdot\ \text{sen }40,8^{o}}{6,7}=71,08^{o}$$

$$\alpha=180^{o}-(40,8^{o}+71,08^{o})=68,12^{o}$$

$$\frac{a}{\text{sen }68,12^{o}}=\frac{6,7}{\text{sen }40,8^{o}}\Rightarrow a=9,52\text{ cm}$$

c.

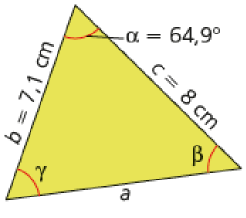


$$\alpha=180^{o}-(138,3^{o}+20,6^{o})=21,1^{o}$$

$$\frac{b}{\text{sen }20,6^{o}}=\frac{12,1}{\text{sen }138,3^{o}}\Rightarrow b=6,4\text{ cm}$$

$$\frac{a}{\text{sen }21,1^{o}}=\frac{12,1}{\text{sen }138,3^{o}}\Rightarrow a=6,55\text{ cm}$$

d.



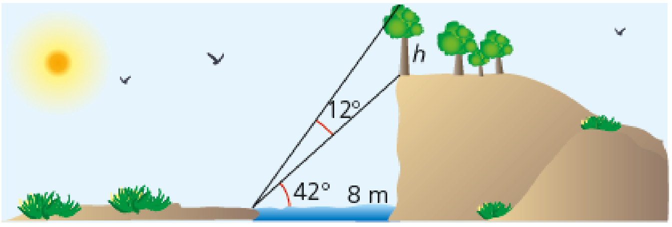
$$a=\sqrt{7,1^{2}+8^{2}-2\cdot 7,1\cdot 8\cdot\cos 64,9^{o}}=8,14\text{ cm}$$

$$\frac{8,14}{\text{sen }64,9^{o}}=\frac{7,1}{\text{sen }\beta}\Rightarrow \beta=\text{arcsen}\frac{7,1\cdot\ \text{sen }64,9^{o}}{8,14}=52,17^{o}$$

$$\gamma=180^{o}-(64,9^{o}+52,17^{o})=62,93^{o}$$

APLICACIONES

9 Desde la orilla de un río se ve un árbol en lo alto de una pared de piedra. Calcula la altura del árbol con los datos del siguiente dibujo:



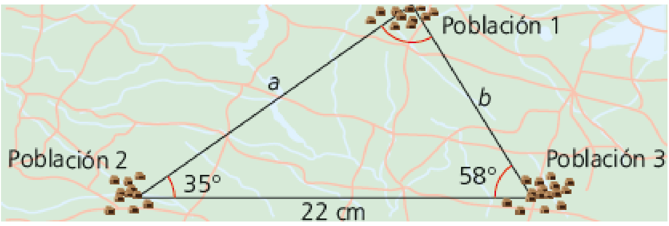
$$\text{tg } 42^o = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 7,2 \text{ m}$$

$12^o + 42^o = 54^o$

$$\text{tg } 54^o = \frac{h+7,2}{8} \Rightarrow h = 8 \cdot \text{tg } 54^o - 7,2 = 3,81 \text{ m}$$

SOLUCIONES PÁG. 189

10 En un mapa se representan las siguientes poblaciones:



a. ¿Qué distancia hay en el mapa entre la población 1 y las poblaciones 2 y 3?

$$\gamma = 180^o - (35^o + 58^o) = 87^o$$

$$\frac{a}{\text{sen } 58^o} = \frac{22}{\text{sen } 87^o} \Rightarrow a = 18,68 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\text{sen } 35^o} = \frac{22}{\text{sen } 87^o} \Rightarrow b = 12,64 \text{ cm}$$

b. Si el mapa está realizado a escala 1:9 000, ¿cuál es la distancia real entre las tres poblaciones?

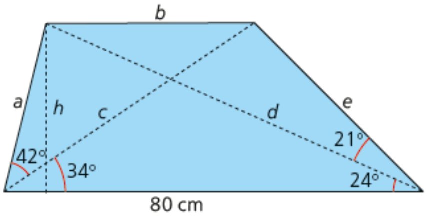
La escala 1:9 000 significa que cada cm del mapa equivale a 9 000 cm de la realidad, con lo que las distancias son:

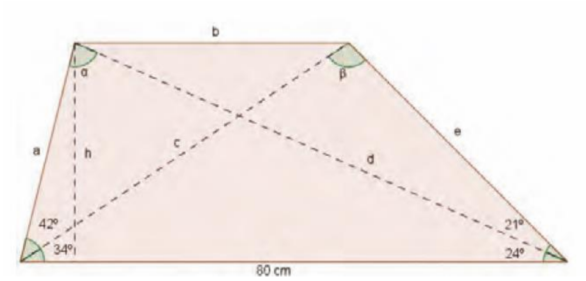
De la población 1 a la 2:
$18,68 \cdot 9000 = 168120 \text{ cm} = 1,68 \text{ km}$

De la población 2 a la 3:
$22 \cdot 9000 = 198000 \text{ cm} = 1,98 \text{ km}$

De la población 3 a la 1:
$12,64 \cdot 9000 = 113760 \text{ cm} = 1,14 \text{ km}$

11 Halla el perímetro y el área de la figura propuesta.





$\alpha = 180º - (42º + 34º + 24º) = 80º$

$\beta = 180º - (34º + 24º + 21º) = 101º$

$42º + 34º = 76º$

$24º + 21º = 45º$

$$\frac{a}{\text{sen } 24º} = \frac{80}{\text{sen } 80º} \Rightarrow a = 33{,}04 \text{ cm}$$

$$\frac{e}{\text{sen } 34º} = \frac{80}{\text{sen } 101º} \Rightarrow e = 45{,}57 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\text{sen } 45º} = \frac{80}{\text{sen } 101º} \Rightarrow c = 57{,}63 \text{ cm}$$

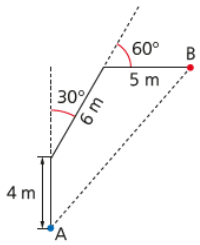
$$\text{sen } 76º = \frac{h}{33{,}04} \Rightarrow h = 32{,}06 \text{ cm}$$

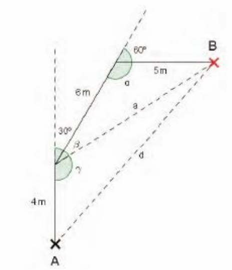
$$b = \sqrt{33{,}04^2 + 57{,}63^2 - 2 \cdot 33{,}04 \cdot 57{,}63 \cdot \cos 42º} = 39{,}78 \text{ cm}$$

$$P = a + b + e + 80 = 33{,}04 + 39{,}78 + 45{,}57 + 80 = 198{,}39 \text{ cm}$$

$$A = \frac{80 + b}{2} \cdot h = \frac{80 + 39{,}78}{2} \cdot 32{,}06 = 1920{,}07 \text{ cm}^2$$

12 A las manos de Felipe ha llegado el mapa de un tesoro escondido. Si en lugar de recorrer el camino indicado en el mapa pudiera ir en línea recta desde el punto A al punto B, ¿cuántos metros recorrería?





$\alpha = 180º - 60º = 120º$

$a = \sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos 120º} = 9,54 \text{ m}$

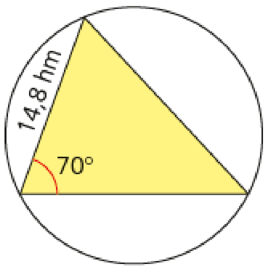
$\dfrac{5}{\text{sen } \beta} = \dfrac{9,54}{\text{sen } 120º} \Rightarrow \beta = 26,99º$

$\gamma = 180º - (30º + 26,99º) = 123,01º$

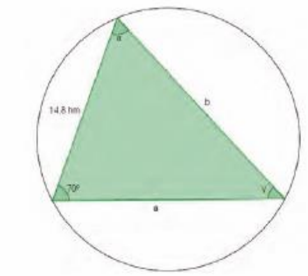
$d = \sqrt{4^2 + 9,54^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9,54 \cdot \cos 123,01º} = 12,19 \text{ m}$

En línea recta tendría que recorrer 12,19 m.

13 Miguel es propietario de una parcela de tierra de forma circular de 20 hm de diámetro. Quiere plantar pinos que ocupen un triángulo como el de la figura.



a. ¿Qué área tendrá el pinar?



$\dfrac{14,8}{\text{sen } \gamma} = 20 \Rightarrow \gamma = 47,73º$

$\alpha = 180º - (70º + 47,73º) = 62,27º$

$\dfrac{b}{\text{sen } 70º} = 20 \Rightarrow b = 18,79 \text{ cm}$

$\dfrac{a}{\text{sen } 62,27º} = 20 \Rightarrow a = 17,7 \text{ cm}$

El área del triángulo será:

$A_t = \dfrac{14,8 \cdot b \cdot a}{4r} = \dfrac{14,8 \cdot 18,79 \cdot 17,7}{40} = 123,06 \text{ ha}$

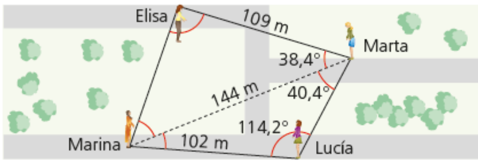
El área de la parcela era de:

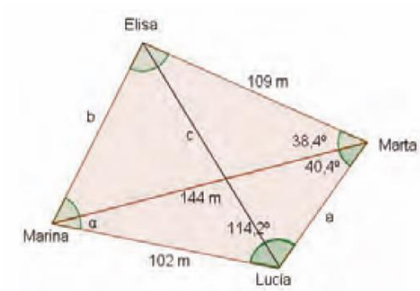
$A_c = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ ha}$

b. ¿Qué área permanecerá sin plantar?

$A_c - A_t = 314{,}16 - 123{,}06 = 191{,}1\,\text{ha}$

14 Las casas de cuatro amigas están separadas como se indica en la figura. Calcula la distancia que hay entre las viviendas de cada una de las amigas.





$\alpha = 180^\circ - (114{,}2^\circ + 40{,}4^\circ) = 25{,}4^\circ$

$$\frac{102}{\text{sen } 40{,}4^\circ} = \frac{a}{\text{sen } 25{,}4^\circ} \Rightarrow a = 67{,}51\,\text{m}$$

$b = \sqrt{144^2 + 109^2 - 2 \cdot 144 \cdot 109 \cdot \cos 38{,}4^\circ} = 89{,}53\,\text{m}$

$38{,}4^\circ + 40{,}4^\circ = 78{,}8^\circ$

$c = \sqrt{67{,}51^2 + 109^2 - 2 \cdot 67{,}51 \cdot 109 \cdot \cos 78{,}8^\circ} = 116{,}53\,\text{m}$

EVALUACIÓN

1 La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene un ángulo agudo de 33,7º cuyo lado opuesto mide 12 cm es:

a. 10 cm **b. 18 cm** **c. 6,7 cm** d. 21,6 cm

El lado de 12 cm es un cateto, con lo que la hipotenusa es:

$$a = \frac{12}{\text{sen } 33{,}7^\circ} = 21{,}63\,\text{cm}$$

2 Dos de los lados de un triángulo miden 6 cm y 8 cm, y el ángulo opuesto al lado de 6 cm es de 35º. La longitud del lado restante es:

a. 12,11 cm b. 10,42 cm **c. 8,33 cm** **d. 23,66 cm**

$$\frac{6}{\text{sen } 35^{\circ}} = \frac{8}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \alpha = 49{,}89^{\circ}$$
$$\beta = 180^{\circ} - (35^{\circ} + 49{,}89^{\circ}) = 95{,}11^{\circ}$$
$$\frac{6}{\text{sen } 35^{\circ}} = \frac{b}{\text{sen } 95{,}11^{\circ}} \Rightarrow b = 10{,}42 \text{ cm}$$

3 Un triángulo tiene un lado de 6 cm y otro de 8 cm. Si el triángulo es obtusángulo, la medida del tercer lado es:

a. 5 cm **b. 10 cm** **c. 7 cm** **d. 9 cm**

a. El triángulo es obtusángulo:
$$\left.\begin{array}{l} 8^2 = 64 \\ 6^2 + 5^2 = 61 \end{array}\right\} \Rightarrow 64 > 61$$

b. El triángulo es rectángulo:
$$\left.\begin{array}{l} 10^2 = 100 \\ 6^2 + 8^2 = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 = 100$$

c. El triángulo es acutángulo:
$$\left.\begin{array}{l} 8^2 = 64 \\ 6^2 + 7^2 = 85 \end{array}\right\} \Rightarrow 64 < 85$$

d. El triángulo es acutángulo:
$$\left.\begin{array}{l} 9^2 = 81 \\ 6^2 + 8^2 = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow 81 < 100$$

4 La medida del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados miden 14 cm, 12 cm y 7 cm es:

a. 10 cm **b. 8 cm** **c. 9 cm** d. 7 cm

$$14^2 = 12^2 + 7^2 - 2 \cdot 12 \cdot 7 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{193 - 196}{168} = 91{,}02^{\circ}$$
$$\frac{14}{\text{sen } 91{,}02^{\circ}} = 2r \Rightarrow r = \frac{14}{2 \cdot \text{sen } 91{,}02^{\circ}} = 7 \text{ cm}$$

5 De un triángulo se conocen dos de sus lados, uno de 8 cm y otro 9 cm, y el ángulo comprendido entre ellos, de 50º. El lado desconocido mide:

a. 7,24 cm **b. 15,44 cm** **c. 15,92 cm** **d. 6,92cm**

$$c = \sqrt{8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos 50^{\circ}} = 7{,}24 \text{ m}$$

6 Un triángulo isósceles tiene un ángulo de 50º, cuyo lado opuesto mide 10 cm. Los lados iguales miden:

a. 9 cm **b. 8,56 cm** c. 11,83 cm **d. 12 cm**

$$2\alpha + 50º = 180º \Rightarrow \alpha = \frac{180º - 50º}{2} = 65º$$

$$\frac{10}{\text{sen } 50º} = \frac{a}{\text{sen } 65º} \Rightarrow a = 11{,}83 \text{ cm}$$

7 La cima de una montaña se ve desde cierta distancia con un ángulo de 60º. Si nos alejamos 10 m más, se ve con un ángulo de 45º. La altura de la montaña es:

a. 34,55 m b. 23,66 m **c. 13,27 m** **d. 20,66 m**

$$\text{tg } 60º = \sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\sqrt{3} \Rightarrow h = (h - 10)\sqrt{3} \Rightarrow h = \sqrt{3}h - 10\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 23{,}66 \text{ m}$$

8 El área de un triángulo obtusángulo que tiene un ángulo de 105º y otro de 20º, y cuyo lado mayor mide 15 cm es:

a. 32,62 cm^2 **b. 50,73 cm^2** **c. 71,23 cm^2** **d. 65,24 cm^2**

$$\alpha = 180º - (105º + 20º) = 55º$$

$$\frac{15}{\text{sen } 105º} = \frac{a}{\text{sen } 55º} \Rightarrow a = 12{,}72 \text{ cm}$$

$$\frac{15}{\text{sen } 105º} = \frac{b}{\text{sen } 20º} \Rightarrow b = 5{,}31 \text{ cm}$$

$$\frac{15}{\text{sen } 105º} = 2r \Rightarrow 2r = 15{,}53 \text{ cm}$$

$$A_t = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r} = \frac{12{,}72 \cdot 5{,}31 \cdot 15}{31{,}06} = 32{,}62 \text{ cm}^2$$

9 El tercer lado de un triángulo que tiene un lado de 3 cm y un segundo lado de 8 cm cuyo ángulo opuesto es de 30º mide:

a. 10,46 cm **b. 13,66 cm** **c. 15,99 cm** **d. 18,45 cm**

$$\frac{8}{\text{sen } 30º} = \frac{c}{\text{sen } 139{,}19º} \Rightarrow c = 10{,}46 \text{ cm}$$

10 El número de triángulos con ángulos de 65º, 37º y 78º es:

a. Ninguno. **b. Infinitos.** **c. Dos.** **d. Uno.**

$65º + 37º + 78º = 180º$. Existen infinitos triángulos con dichos ángulos, al poder dibujar infinitos triángulos semejantes.